



Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

# Métodos Matemáticos em Biologia de Populações IV

Roberto André Kraenkel, *IFT*

<http://www.ift.unesp.br/users/kraenkel>

Apontamentos de Cálculo Diferencial e Integral  
Parte I

IB-USP, 2011



# Sumário

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## 1 Prolegomena



# Sumário

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## 1 Prolegomena

## 2 Funções e Suas Variações



# Sumário

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

**1** Prolegomena

**2** Funções e Suas Variações

**3** Derivadas



# Sumário

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

**1** Prolegomena

**2** Funções e Suas Variações

**3** Derivadas

**4** Cálculos



# Sumário

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

- 1** Prolegomena
- 2** Funções e Suas Variações
- 3** Derivadas
- 4** Cálculos
- 5** Regras do Cálculo



# Sumário

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

- 1** Prolegomena
- 2** Funções e Suas Variações
- 3** Derivadas
- 4** Cálculos
- 5** Regras do Cálculo
- 6** Máximos e Mínimos



# Sumário

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

- 1** Prolegomena
- 2** Funções e Suas Variações
- 3** Derivadas
- 4** Cálculos
- 5** Regras do Cálculo
- 6** Máximos e Mínimos
- 7** Derivada Segunda





# Sumário

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

- 1** Prolegomena
- 2** Funções e Suas Variações
- 3** Derivadas
- 4** Cálculos
- 5** Regras do Cálculo
- 6** Máximos e Mínimos
- 7** Derivada Segunda
- 8** Derivadas Parciais



# Sumário

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

- 1** Prolegomena
- 2** Funções e Suas Variações
- 3** Derivadas
- 4** Cálculos
- 5** Regras do Cálculo
- 6** Máximos e Mínimos
- 7** Derivada Segunda
- 8** Derivadas Parciais
- 9** Resumo Final



Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

*Differential calculus is more interesting because it  
describes how things change.*

*G. Evelyn Hutchinson*  
citado por T.E. Lovejoy





# Números

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## O que medimos são números.

- Boa parte das medidas que realizamos em ecologia resultam em números.
- Estes números representam um certo sistema num dado momento do tempo e numa certa região do espaço.
- E esses números podem mudar: tanto no tempo quanto no espaço.
- Para quantificar estas variações usamos a idéia de taxa de variação.
- A tradução matemática da idéia de taxa de variação é o que dá origem ao *cálculo diferencial*.



# Funções

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Um filme



## Descrevendo o filme com números

| Tempo (s) | Bactérias           |
|-----------|---------------------|
| 0         | 2                   |
| 1         | 4                   |
| 2         | 8                   |
| 3         | 16                  |
| 4         | 32                  |
| 5         | 64                  |
| 14        | 16384               |
| 30        | 1073741824          |
| 60        | 1152921504606846976 |

⇒ O número de bactérias é função do tempo,  $N(t)$ .



# Funções II

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

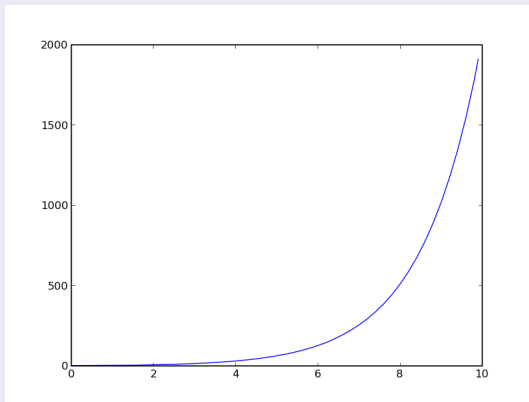
Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Gráficos

Depois de um certo tempo começamos a nos perder com estes números. Números grandes nos confundem. Mais interessante que a tabela é fazer um gráfico:





## Quão rápido?

Podemos agora nos colocar a questão:

Quão rápido cresce o número de bactérias?

ou

Qual é a velocidade de crescimento das bactérias?

## Definindo a taxa de variação

Para que a questão acima tenha sentido, é preciso definir a  
"velocidade de crescimento das bactérias"

Vamos fazê-lo agora!



# Taxas II

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Definindo a taxa de variação

$$\text{Taxa de variação de } N(t) = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

Em palavras:

pegue a função em dois instantes próximos ( por um intervalo de tempo  $\Delta t$  ) :  $t$  e  $t + \Delta t$ .  
Calcule a diferença e divida pelo intervalo de tempo.

## Faz sentido?

- Uma função que não varia tem taxa de variação nula. OK!
- Uma função que cresce tem taxa de variação positiva. OK!
- Uma função que decresce tem taxa de variação negativa. OK!
- Uma função que cresce mais rápido que outra, tem maior taxa de variação. OK!





# Mais sobre taxas de variação

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

- Tem um porém.
- O valor de  $\Delta t$  é arbitrário.
- Mas para capturar melhor a noção de taxa de variação, gostaríamos que  $\Delta t$  fosse o menor possível. Bem pequeno mesmo.
- Quanto menor  $\Delta t$ , mais  $N(t + \Delta t)$  fica próximo de  $N(t)$ .
- E a razão

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

■ ?,

■  $\frac{0}{0}$  ?



# Taxas de variação instantâneas

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

- Para vermos que a expressão que escrevemos anteriormente faz sentido, podemos tentar calculá-la para um caso bem definido.
- Tomemos  $N(t) = t^2$ .
- Vamos calcular a taxa de variação:

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

- Para tal escolhemos algum valor de  $t$ . Digamos  $t = 1$

| $\Delta t$ | $\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$ |
|------------|---------------------------------------|
| 0,5        | 2,5                                   |
| 0,1        | 2,1                                   |
| 0,01       | 2,01                                  |
| 0,001      | 2,001                                 |
| 0.00...1   | 2,00000....                           |



# Mais taxas...

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

**Derivadas**

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Taxas de variação instantânea

- Ótimo: descobrimos que a taxa de variação instantânea da função  $N(t) = t^2$  quando  $t = 1$  é 2.
- E se  $t = 2$ , ou ainda outros valores?
- Podemos fazer o cálculo.



# Mais taxas...

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

**Derivadas**

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Taxas de variação instantânea

- Ótimo: descobrimos que a taxa de variação instantânea da função  $N(t) = t^2$  quando  $t = 1$  é 2.
- E se  $t = 2$ , ou ainda outros valores?
- Podemos fazer o cálculo.



# Mais taxas...

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Taxas de variação instantânea

- Ótimo: descobrimos que a taxa de variação instantânea da função  $N(t) = t^2$  quando  $t = 1$  é 2.
- E se  $t = 2$ , ou ainda outros valores?
- Podemos fazer o cálculo.

| $t$ | $\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$ |
|-----|---|
| 1   | 2                                       |
| 2   | 4                                       |
| 3   | 6                                       |
| 4   | 8                                       |

sempre com  $\Delta t \Rightarrow 0$ .

Então temos que a taxa de variação instantânea de  $t^2$  é  $2t$ .



# Derivada

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

**Derivadas**

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

Derivada= taxa de variação instantânea

Nós acabamos de calcular a nossa primeira derivada.  
Vamos chamar a taxa de variação instantânea de uma função  $N(t)$ ,

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

de derivada de  $N(t)$  em relação a  $t$ . Denotamo-la por :

$$\frac{dN}{dt}$$



# Derivada

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

**Derivadas**

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Comentários

- veja que nada disto depende do fato de estarmos falando de um organismo em particular;
- podemos pensar em derivadas de qualquer função;
- a derivada de uma função é outra função;
- podemos ter funções que não dependem do tempo, e sim do espaço, ou de outra variável;
- teremos taxas de variação espacial  $\implies$  teremos derivadas de uma função em relação a  $x$ ;
- assim podemos considerar a derivada de uma função em relação a qualquer *variável independente*.

Mas chega de enrolação. Vamos aprender a calcular derivadas.





## Função Constante

$$N(t) = K$$

onde  $K$  é uma constante qualquer.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{K - K}{\Delta t} = 0$$

A taxa de variação instantânea de uma função contante é zero.





# Cálculos II

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

**Cálculos**

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Função Linear

$$N(t) = at + b$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes quaisquer.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{a(t + \Delta t) + b - at + b}{\Delta t} = \frac{a\Delta t}{\Delta t} = a$$

A taxa de variação instantânea de uma função linear é uma constante.



# Cálculos III

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

**Cálculos**

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Função Quadrática

$$N(t) = at^2 + bt + c$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes quaisquer.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{a(t + \Delta t)^2 + b(t + \Delta t) + c - at^2 - bt - c}{\Delta t} =$$

$$\frac{at^2 + 2at\Delta t + a(\Delta t)^2 + bt + b\Delta t + c - at^2 - bt - c}{\Delta t} =$$

$$\frac{2at\Delta t + a(\Delta t)^2 + b\Delta t}{\Delta t} = 2at + b + a(\Delta t) = 2at + b$$

onde usamos que  $\Delta t$  tende a zero.

A taxa de variação instantânea de uma função quadrática é uma função linear.



# Cálculos III bis

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

**Cálculos**

Regras do  
Cálculo

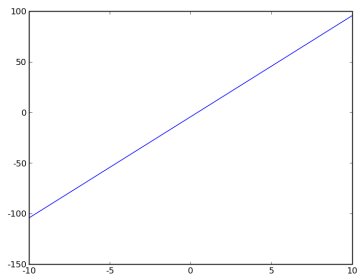
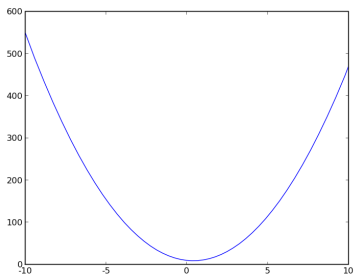
Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Função Quadrática e sua Derivada





# Cálculos IV

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

**Cálculos**

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Polinômio

$$N(t) = at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} + \dots yt + z$$

onde  $a, \dots$  são constantes quaisquer.

$$\frac{dN}{dt} = ant^{n-1} + b(n-1)t^{n-2} + c(n-2)t^{n-3} + \dots y$$

## Somas

- Note que a derivada da soma é igual a soma das derivadas.
- Mas a derivada do produto **não** é o produto das derivadas.



# Regras de Cálculo

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

**Regras do  
Cálculo**

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Regras do Cálculo

- Muito bem, aprendemos a derivar um polinômio.
- E mais,...?
- Outras funções?
- Vamos aprender isso de uma forma instrumental..
- Vamos apresentar cinco funções básicas e suas derivadas.
- Ede pois vamos aprender a derivar somas, produtos e composições de funções.



# Regras de Cálculo II

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

**Regras do  
Cálculo**

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Cinco casos.

$$f(x) = e^x \Rightarrow \frac{df}{dx} = e^x$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow \frac{df}{dx} = 1/x$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = -\sin(x)$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow \frac{df}{dx} = nx^{n-1} \quad \text{inclusive para } n \text{ negativo.}$$



# Regras de Cálculo III

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

**Regras do  
Cálculo**

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Somas

A derivada da soma de duas funções é a soma das suas derivadas.

$$\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d(\sin(x) + \ln(x))}{dx} = \cos(x) + 1/x$$

$$\frac{d(x^4 + \cos(x))}{dx} = 4x^3 - \sin(x)$$



# Regras de Cálculo IV

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

**Regras do  
Cálculo**

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Produtos

A derivada do produto de duas funções:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot h(x) + g(x) \cdot \frac{dh}{dx}$$

Exemplos

$$f(x) = x^4 \cdot \sin(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = 4x^3 \cdot \sin(x) + x^4 \cdot \cos(x)$$

$$f(x) = x^2 \cdot \exp(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2x \cdot \exp(x) + x^2 \cdot \exp(x)$$

$$f(x) = \ln(x) \cdot \cos(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \cos(x) - \ln(x) \cdot \sin(x)$$







# Exercícios

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

Calcule as derivadas das funções abaixo:

$$f(x) = 5x^2 + 4$$

$$f(x) = 1/x$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = x \sin(x)$$

$$f(x) = e^x \ln(x)$$

$$f(x) = x + \sin(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \sin(x)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$f(x) = x^2 - x^4 \cos(x)$$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$f(x) = x^2 e^x$$

$$f(x) = x^5 \sin(x)$$

$$f(x) = e^x x^7$$



# Compondo funções

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Função de função

- Para que possamos derivar funções mais interessantes, precisamos primeiro nos lembrar de como compor funções.

- Lembremos do significado de

$$f(g(x))$$

- Isto é: tome  $x$ , aplique  $g$  e obtenha  $g(x)$ ; neste resultado obtenha  $f$  e obtenha  $f(g(x))$ .
- Façamos alguns exercícios:

| $f(x)$    | $g(x)$    | $f(g(x))$    |
|-----------|-----------|--------------|
| $\sin(x)$ | $x^2$     | $\sin(x^2)$  |
| $x^3$     | $\ln(x)$  | $(\ln(x))^3$ |
| $e^x$     | $-x^2$    | $e^{-x^2}$   |
| $1/x$     | $\sin(x)$ | $1/\sin(x)$  |

| $f(x)$   | $g(x)$ | $f(g(x))$ |
|----------|--------|-----------|
| $-x^2$   | $e^x$  | $-e^{2x}$ |
| $\ln(x)$ | $e^x$  | $x$       |
| $1/x$    | $e^x$  | $e^{-x}$  |
| $e^x$    | $1/x$  | $e^{1/x}$ |



# Compondo funções II

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Derivada de uma composição de funções

- Agora, vamos ver como derivar a composição de duas funções.
- Se conheço a derivada da função  $f(x)$  e da função  $g(x)$ , deve ser possível obter a derivada de  $f(g(x))$ .
- De fato é.
- A regra é:

$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{dg}{dx} \frac{df}{dg}$$

Vamos destrinchar isso.



# Compondo funções II

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Derivada de uma composição de funções

Vamos proceder por exemplos.

- Seja  $f(x) = \sin(x)$  e  $g(x) = x^2$ .
- Primeiramente calculemos  $f(g(x)) = \sin(x^2)$
- Então a derivada da função acima é:

$$\frac{d \sin(x^2)}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2)$$

Vamos treinar mais.



# Compondo funções III

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Derivada de uma composição de funções

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = ax, \quad \rightarrow f(g(x)) = e^{ax} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(f(g(x)))}{dx} = ae^{ax}$$

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = -x^2, \quad \rightarrow f(g(x)) = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(f(g(x)))}{dx} = -2x \cdot e^{-x^2}$$

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = ax, \quad \rightarrow f(g(x)) = \sin(ax) \quad \Rightarrow \quad \frac{d(f(g(x)))}{dx} = a \cos(ax)$$

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = 2x + 1, \quad \rightarrow f(g(x)) = \ln(2x + 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{2}{2x + 1}$$



# Compondo funções IV

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Derivada de uma composição de funções

$$f(x) = 1/x, \quad g(x) = \cos(x), \rightarrow f(g(x)) = 1/\cos(x) \quad \Rightarrow \frac{f(g(x))}{dx} = \sin(x) \cdot \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = \sin(x), \rightarrow f(g(x)) = (\sin(x))^3 \quad \Rightarrow \frac{f(g(x))}{dx} = 3 \cos(x) \cdot (\sin(x))^2$$

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = ax, \rightarrow f(g(x)) = \ln(ax) \quad \Rightarrow \frac{f(g(x))}{dx} = 1/x$$



# Compondo funções V

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Muitas e muitas derivadas

- Pronto, agora você sabe derivar muitas funções.
- Somando, multiplicando e compondo as funções elementares
- Agora é uma questão de treino...
- Faça alguns exercícios.



# Exercícios

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Derive as funções abaixo

$$\frac{1}{x+1}$$

$$e^{-(x-a)^2}$$

$$\sin(\ln(x))$$

$$x \cdot \sin(3x)$$

$$x \cdot (\sin(x))^2$$

$$\ln(2x+5)$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$(1+x^2)e^{-x}$$

$$(\ln(x))^2$$

$$\frac{x}{1+e^{2x}}$$





# Máximos e Mínimos

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

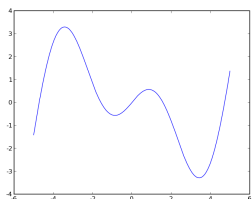
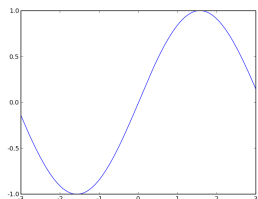
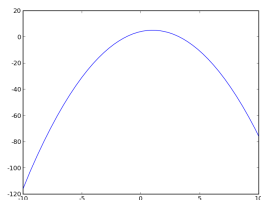
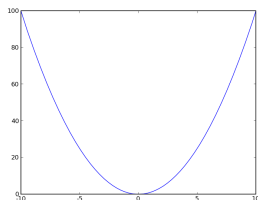
**Máximos e  
Mínimos**

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Alguns gráficos





# Máximos e Mínimos

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

- Vemos nas funções da página anterior que as funções podem ter pontos de **máximos** ou **mínimos** locais.
- Referimo-nos aos pontos que são os ápices e vales dos gráficos anteriores
- Interpretemo-los em termos de derivadas:
  - ao redor de um ápice, a função é crescente e se torna decrescente: a derivada passa de positiva para negativa;
  - ao redor de um vale, a função é decrescente e se torna crescente: a derivada passa de negativa para positiva;
- No ápice ou no vale, ou seja, num máximo ou mínimo locais a derivada é zero.
- Para melhor visualizar a situação, veja a figura seguinte, mostrando a função e a sua derivada, com zooms nos ápices e vales.



# Máximos e Mínimos II

Métodos Matemáticos em Biologia de Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do Cálculo

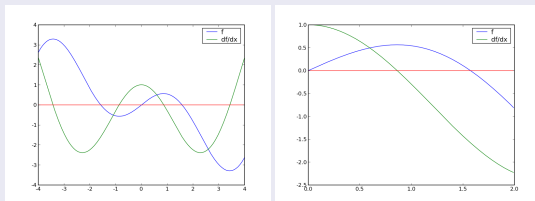
Máximos e Mínimos

Derivada Segunda

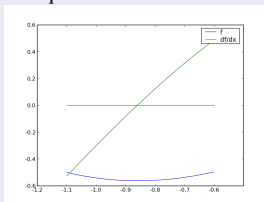
Derivadas Parciais

Resumo Final

## A função e sua derivada



No alto à esquerda, a função e sua derivada. À direita, zoom ao redor de um máximo local. Abaixo, zoom ao redor de um mínimo local. Veja como o gráfico da derivada cruza o zero no mesmo ponto  $x$  em que se localizam máximos e mínimos locais.

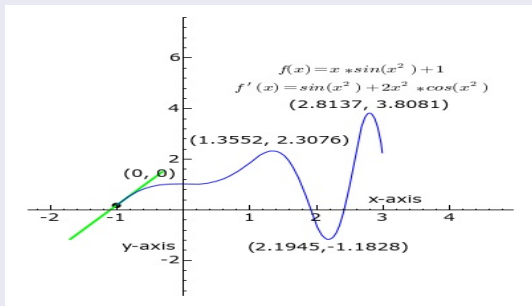




## A derivada como uma tangente

Podemos dar uma interpretação geométrica para a derivada de uma função. Usaremos pouco esse conceito no curso, mas vamos dar uma olhada rápida.

Primeiro lembremos o que é uma reta tangente a um ponto de um gráfico.





# Geometria II

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

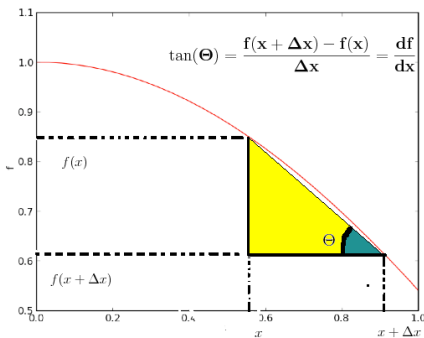
Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## A derivada como uma tangente

- Olhemos a figura abaixo:



Fica como um exercício de trigonometria mostrar que a inclinação ( $\tan(\Theta)$ ) da reta tangente ao gráfico de  $f(x)$  num dado ponto  $x$  é igual a à derivada da função nets ponto  $x$ .

Veja que isto é coerente com o fato dos máximos e mínimos locais terem derivada nula.



# Derivada Segunda

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

**Derivada  
Segunda**

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Derivada da Derivada

- Vimos que a derivada de uma função  $f(x)$  é uma outra função,  $df/dx$ .
- Em sendo outra função, podemos calcular a sua derivada também:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right)$ .
- Chamamos esta novíssima função de "derivada segunda de  $f(x)$ ". E escrevemos:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right)$$

- Podemos evidentemente ir calculando derivadas de derivadas, e teremos derivadas terceiras, quartas, etc.



# Derivada Segunda II

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

**Derivada  
Segunda**

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Exemplos

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \frac{df}{dx} = a \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = 0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2ax + b \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = 2a$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \cos(x) \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = -\sin(x)$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = e^{Ax} \Rightarrow \frac{df}{dx} = Ae^{Ax} \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = A^2e^{Ax}$$



# Derivadas Parciais

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Várias Variáveis

- Vamos agora a um último conceito.
- Há funções que são funções de mais de uma variável.
- Por exemplo, uma grandeza que dependa do tempo e do local no espaço;
- Escrevemos  $f(x, t)$ , por exemplo;
- E como derivamos esta função?
- Primeira: derivada em relação à qual variável?
- Digamos que seja  $t$ .
- Então consideramos  $x$  como se fosse uma contante e derivamos a função "normalmente" em relação a  $t$ .
- Vamos a um exemplo:

$$f(x, t) = x^2 + 2xt + t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 2x + 2t$$

- E usamos um novo sinal:  $\partial$  no lugar de  $d$  para indicar que tomamos uma **derivada parcial**.





# Derivadas Parciais

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## Exemplos

$$f(x, y) = xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$f(x, y) = x \cos(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin(y), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y)$$

$$f(x, y) = e^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y}$$

$$f(x, y) = x/y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -x/y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1/y$$

$$f(x, y) = \cos(x) + \sin(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(y), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x)$$

$$f(x, y) = \ln(x + y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x + y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + y}$$

$$f(x, y) = \sin(Ax + By) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = B \cos(Ax + By), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = A \cos(Ax + By)$$



# Resumo Final

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

Resumo Final

## O que ficou

- A derivada é uma forma de quantificar a noção de taxa de variação instantânea.
- A derivada de uma função é também uma função.
- Aprendemos algumas regras:
  - Derivamos algumas funções elementares;
  - Depois aprendemos a derivar a soma, o produto e a composição de funções.
- Podemos derivar duas vezes uma função: a taxa variação da taxa de variação.
- E também podemos derivar funções de mais de uma variável.



# Resumo Final

Métodos  
Matemáticos  
em Biologia de  
Populações

R.A. Kraenkel

Prolegomena

Funções e Suas  
Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do  
Cálculo

Máximos e  
Mínimos

Derivada  
Segunda

Derivadas  
Parciais

**Resumo Final**

Você pode baixar esta aula indo ao site

<http://web.me.com/kraenkel/MMBPQ>

**Obrigado pela atenção**