

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

BIE 5786 - Ecologia de Populações

Roberto André Kraenkel

<http://www.ift.unesp.br/users/kraenkel>
kraenkel@ift.unesp.br

Populações Interagentes: competição

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

1 Competição

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

1 Competição

2 Modelo Matemático

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- 1 Competição
- 2 Modelo Matemático
- 3 Interpretando os resultados

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- 1 Competição
- 2 Modelo Matemático
- 3 Interpretando os resultados
- 4 Protozoários, formigas e plankton!

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- 1 Competição
- 2 Modelo Matemático
- 3 Interpretando os resultados
- 4 Protozoários, formigas e plankton!
- 5 Muitas espécies



Competição

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Consideremos a **competição** entre duas espécies.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Consideremos a **competição** entre duas espécies.
- Diremos que duas espécies estão em competição se

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Consideremos a **competição** entre duas espécies.
- Diremos que duas espécies estão em competição se **a presença de uma é prejudicial à outra, e vice-versa.**

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Consideremos a **competição** entre duas espécies.
- Diremos que duas espécies estão em competição se **a presença de uma é prejudicial à outra, e vice-versa.**
- Os mecanismos biológicos subjacentes podem ser de duas ordens;
 - competição por **exploração** :

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Consideremos a **competição** entre duas espécies.
- Diremos que duas espécies estão em competição se **a presença de uma é prejudicial à outra, e vice-versa.**
- Os mecanismos biológicos subjacentes podem ser de duas ordens;
 - competição por **exploração** : as duas espécies competem por um recurso vital limitado.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Consideremos a **competição** entre duas espécies.
- Diremos que duas espécies estão em competição se **a presença de uma é prejudicial à outra, e vice-versa.**
- Os mecanismos biológicos subjacentes podem ser de duas ordens;
 - competição por **exploração** : as duas espécies competem por um recurso vital limitado.
 - **A competição por exploração pode ser simétrica ou assimétrica entre as duas espécies.**

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Consideremos a **competição** entre duas espécies.
- Diremos que duas espécies estão em competição se **a presença de uma é prejudicial à outra, e vice-versa.**
- Os mecanismos biológicos subjacentes podem ser de duas ordens;
 - competição por **exploração** : as duas espécies competem por um recurso vital limitado.
 - **A competição por exploração pode ser simétrica ou assimétrica entre as duas espécies.**
 - competição por **interferência**:

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Consideremos a **competição** entre duas espécies.
- Diremos que duas espécies estão em competição se **a presença de uma é prejudicial à outra, e vice-versa.**
- Os mecanismos biológicos subjacentes podem ser de duas ordens;
 - competição por **exploração** : as duas espécies competem por um recurso vital limitado.
 - **A competição por exploração pode ser simétrica ou assimétrica entre as duas espécies.**
 - competição por **interferência**: uma espécie ativamente impede que a outra tenha acesso à recursos vitais.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Consideremos a **competição** entre duas espécies.
- Diremos que duas espécies estão em competição se **a presença de uma é prejudicial à outra, e vice-versa.**
- Os mecanismos biológicos subjacentes podem ser de duas ordens;
 - competição por **exploração** : as duas espécies competem por um recurso vital limitado.
 - A competição por exploração pode ser simétrica ou assimétrica entre as duas espécies.
 - competição por **interferência**: uma espécie ativamente impede que a outra tenha acesso à recursos vitais.
 - A competição por interferência é usualmente assimétrica.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Consideremos a **competição** entre duas espécies.
- Diremos que duas espécies estão em competição se **a presença de uma é prejudicial à outra, e vice-versa.**
- Os mecanismos biológicos subjacentes podem ser de duas ordens;
 - competição por **exploração** : as duas espécies competem por um recurso vital limitado.
 - A competição por exploração pode ser simétrica ou assimétrica entre as duas espécies.
 - competição por **interferência**: uma espécie ativamente impede que a outra tenha acesso à recursos vitais.
 - A competição por interferência é usualmente assimétrica. Uma espécie mais forte interfere na atividade da mais fraca.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Consideremos a **competição** entre duas espécies.
- Diremos que duas espécies estão em competição se **a presença de uma é prejudicial à outra, e vice-versa.**
- Os mecanismos biológicos subjacentes podem ser de duas ordens;
 - competição por **exploração** : as duas espécies competem por um recurso vital limitado.
 - **A competição por exploração pode ser simétrica ou assimétrica entre as duas espécies.**
 - competição por **interferência**: uma espécie ativamente impede que a outra tenha acesso à recursos vitais.
 - **A competição por interferência é usualmente assimétrica. Uma espécie mais forte interfere na atividade da mais fraca.**
 - Os dois tipos de competição podem coexistir.



Nota bene:

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Existe também um conceito adicional relativo à competição, que é o que competição aparente.
- Neste caso, devemos ter duas presas, não consumindo os mesmos recursos.
- Neste caso, elas não são competidoras por exploração.
- se suposermos porém que ambas são presas comuns a um mesmo predador, teremos que o aumento da população de uma das presas (por exemplo, por maior disponibilidade de recursos ou sucesso de estratégias de fuga) aumenta o número de predadores e portanto diminui a população da outra presa.
- Em suma, o aumento populacional de uma prejudica a outra, e vice-versa.

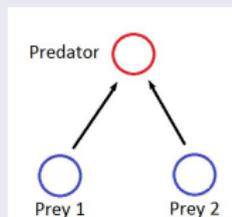


Figura: Módulo de comunidade conhecido como competição aparente

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Note que estamos falando de competição **inter-específica**

Modelos para espécies em competição

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Note que estamos falando de competição **inter-específica**
- A competição **intra-específica** (entre indivíduos da mesma população) dá origem ao modelo *logístico* estudado na primeira aula.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Note que estamos falando de competição **inter-específica**
- A competição **intra-específica** (entre indivíduos da mesma população) dá origem ao modelo *logístico* estudado na primeira aula.
- No caso da competição inter-específica, podemos distinguir dois tipos de modelos:

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Note que estamos falando de competição **inter-específica**
- A competição **intra-específica** (entre indivíduos da mesma população) dá origem ao modelo *logístico* estudado na primeira aula.
- No caso da competição inter-específica, podemos distinguir dois tipos de modelos:
 - **implícitos**

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Note que estamos falando de competição **inter-específica**
- A competição **intra-específica** (entre indivíduos da mesma população) dá origem ao modelo *logístico* estudado na primeira aula.
- No caso da competição inter-específica, podemos distinguir dois tipos de modelos:
 - **implícitos** em que não se levam em conta a dinâmica dos recursos pelos quais se dá a competição .

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Note que estamos falando de competição **inter-específica**
- A competição **intra-específica** (entre indivíduos da mesma população) dá origem ao modelo *logístico* estudado na primeira aula.
- No caso da competição inter-específica, podemos distinguir dois tipos de modelos:
 - **implícitos** em que não se levam em conta a dinâmica dos recursos pelos quais se dá a competição .
 - **explícitos**

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Note que estamos falando de competição **inter-específica**
- A competição **intra-específica** (entre indivíduos da mesma população) dá origem ao modelo *logístico* estudado na primeira aula.
- No caso da competição inter-específica, podemos distinguir dois tipos de modelos:
 - **implícitos** em que não se levam em conta a dinâmica dos recursos pelos quais se dá a competição .
 - **explícitos** em que se leva.

Modelos para espécies em competição

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Note que estamos falando de competição **inter-específica**
- A competição **intra-específica** (entre indivíduos da mesma população) dá origem ao modelo *logístico* estudado na primeira aula.
- No caso da competição inter-específica, podemos distinguir dois tipos de modelos:
 - **implícitos** em que não se levam em conta a dinâmica dos recursos pelos quais se dá a competição .
 - **explícitos** em que se leva.
 - Vejamos uma forma diagramática de explicitar estas relações

Modelos para espécies em competição

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Note que estamos falando de competição **inter-específica**
- A competição **intra-específica** (entre indivíduos da mesma população) dá origem ao modelo *logístico* estudado na primeira aula.
- No caso da competição inter-específica, podemos distinguir dois tipos de modelos:
 - **implícitos** em que não se levam em conta a dinâmica dos recursos pelos quais se dá a competição .
 - **explícitos** em que se leva.
 - Vejamos uma forma diagramática de explicitar estas relações

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

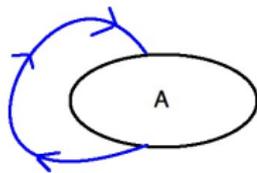


Figura: Uma única espécie. Temos competição intra-específica, indicada pela seta azul

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

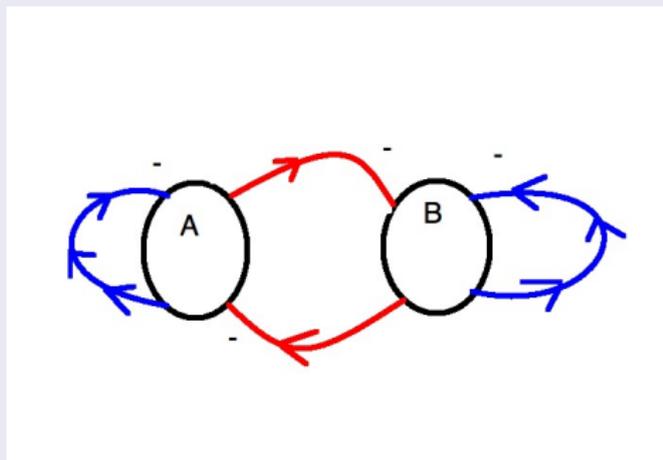


Figura: Duas espécies. Além da competição **intra-específica**, ambas competem entre si. Este é um modelo **implícito**, pois não se faz menção aos recursos pelos quais as espécies competem. Tampouco pode-se distinguir se a competição é por **exploração** ou **interferência**.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

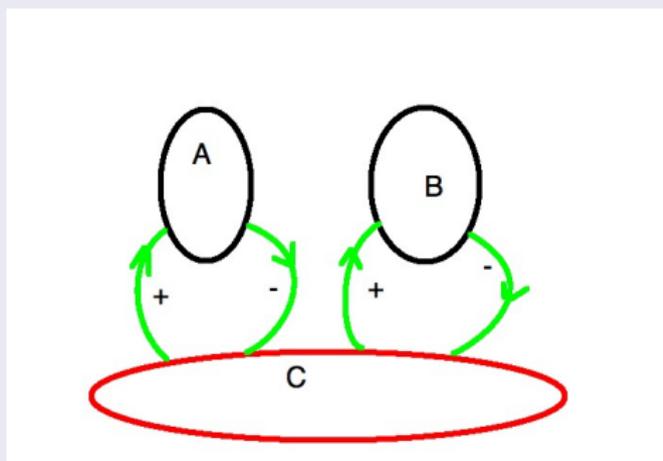


Figura: Duas espécies (A e B) que se nutrem de C. A competição intra-específica foi omitida (mas pode existir). Temos aqui um modelo **explícito** de competição inter-específica por **exploração**. A relação entre A e C e entre B e C é de **predador-presa**

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

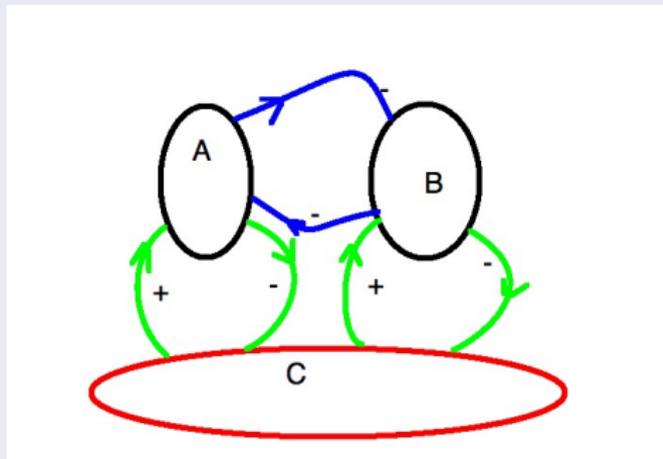


Figura: Duas espécies (A e B) que se nutrem de C. A competição intra-específica foi novamente omitida (mas pode existir). Temos um modelo **explícito** que incorpora a competição por **exploração** e por **interferência**. A relação entre A e C e entre B e C é de **predador-presa** e ademais A e B interagem por interferência.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

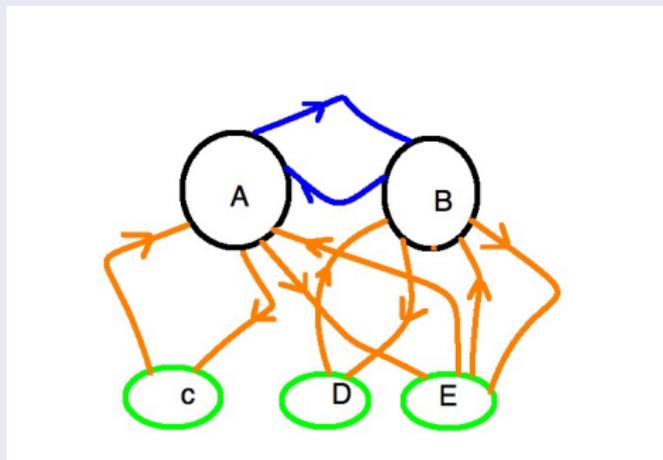


Figura: Modelo em que duas espécies, **A e B**, competem por recursos, (**E**) além de terem presas exclusivas (**A ↔ C**) e (**B ↔ D**). Ademais há competição por interferência.



Modelo Matemático

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

**Modelo
Matemático**

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

**Modelo
Matemático**

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Vamos considerar o caso mais simples:

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Vamos considerar o caso mais simples:
 - **Duas espécies,**

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Vamos considerar o caso mais simples:
 - **Duas espécies,**
 - **Modelo de competição implícito,**

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Vamos considerar o caso mais simples:
 - **Duas espécies,**
 - **Modelo de competição implícito,**
 - **Competição intra-espécies levada em conta.**

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Vamos considerar o caso mais simples:
 - **Duas espécies,**
 - **Modelo de competição implícito,**
 - **Competição intra-espécies levada em conta.**
- Procedemos como no caso de relação predador-presa.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Vamos considerar o caso mais simples:
 - **Duas espécies,**
 - **Modelo de competição implícito,**
 - **Competição intra-espécies levada em conta.**
- Procedemos como no caso de relação predador-presa.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Sejam N_1 e N_2 as duas populações em considerção .

Modelo tipo Lotka-Volterra para competição

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Cada uma delas cresce na ausência da outra, de modo logístico:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} \right]$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \frac{N_2}{K_2} \right]$$

onde r_1 e r_2 são as taxas de crescimento intrínsecas das populações e K_1 e K_2 são as capacidades de suporte de cada população isolada.

Modelo tipo Lotka-Volterra para competição

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Devemos agora introduzir a influência mútua entre as populações :

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - a N_2 \right]$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \frac{N_2}{K_2} - b N_1 \right]$$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Ou de forma mais usual:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right]$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right]$$

Modelo tipo Lotka-Volterra para competição

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

Ou de forma mais usual:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - \underbrace{b_{12}}_{\downarrow} \frac{N_2}{K_1} \right]$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \frac{N_2}{K_2} - \underbrace{b_{21}}_{\downarrow} \frac{N_1}{K_2} \right]$$

onde b_{12} e b_{21} são os coeficientes que medem o **nível de competição** entre as duas populações .

Modelo tipo Lotka-Volterra para competição

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

Chegamos pois a um modelo do tipo Lotka-Volterra para espécies em competição . Note que os termos de interação tem ambos sinal negativo. Todas as constantes $r_1, r_2, K_1, K_2, b_{12}$ e b_{21} são supostas positivas.

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right]$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right]$$

TRATEMOS DE ANALISÁ-LO.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Vamos inicialmente fazer uma mudança de variáveis, passando à variáveis reescaladas.

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right]$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right]$$

Defina:

$$u_1 = \frac{N_1}{K_1}, \quad u_2 = \frac{N_2}{K_2}, \quad \tau = r_1 t$$

Ou seja, estamos medindo as populações em unidades de capacidades de suporte e o tempo em unidade de $1/r_1$.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 \left[1 - u_1 - b_{12} \frac{K_2}{K_1} u_2 \right]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{r_2}{r_1} u_2 \left[1 - u_2 - b_{21} \frac{K_1}{K_2} u_1 \right]$$

As equações nas novas variáveis se escrevem desta forma.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Definindo:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

Definindo:

$$a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1},$$

$$a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2}$$

$$\rho = \frac{r_2}{r_1}$$

teremos as equações ao lado.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Definindo:

$$a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1},$$

$$a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2}$$

$$\rho = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

teremos as equações ao lado.
Trata-se de um sistema equações
diferenciais a derivadas ordiná-
rias não-linear.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plâncton!

Muitas espécies

Definindo:

$$a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1},$$

$$a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2}$$

$$\rho = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

teremos as equações ao lado. Trata-se de um sistema equações diferenciais a derivadas ordinárias não-linear.

PRECISAMOS ESTUDAR O COMPORTAMENTO DAS SOLUÇÕES

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

Nada de soluções explícitas.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

Nada de soluções explícitas.

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- Devemos então fazer uma análise *qualitativa* da evolução .

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

Nada de soluções explícitas.

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- Devemos então fazer uma análise *qualitativa* da evolução .
- Começaremos encontrando os pontos no plano $(u_1 \times u_2)$ tais que:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du_2}{dt} = 0.$$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

Nada de soluções explícitas.

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- Devemos então fazer uma análise *qualitativa* da evolução .
- Começaremos encontrando os pontos no plano $(u_1 \times u_2)$ tais que:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du_2}{dt} = 0.$$

São chamados de **pontos fixos**.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

Nada de soluções explícitas.

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- Devemos então fazer uma análise *qualitativa* da evolução .
- Começaremos encontrando os pontos no plano $(u_1 \times u_2)$ tais que:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du_2}{dt} = 0.$$

São chamados de **pontos fixos**.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

**Modelo
Matemático**

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies



$$\frac{du_1}{dt} = 0 \Rightarrow u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2] = 0$$



$$\frac{du_2}{dt} = 0 \Rightarrow u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1] = 0$$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies



$$u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2] = 0$$



$$u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1] = 0$$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies



$$u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2] = 0$$



$$u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1] = 0$$

- São duas equações algébricas para duas variáveis (u_1 e u_2).

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies



$$u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2] = 0$$



$$u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1] = 0$$

- São duas equações algébricas para duas variáveis (u_1 e u_2).
- Temos **quatro** possíveis soluções .

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies



$$u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2] = 0$$



$$u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1] = 0$$

- São duas equações algébricas para duas variáveis (u_1 e u_2).
- Temos **quatro** possíveis soluções .Quatro possíveis pontos fixos.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

**Modelo
Matemático**

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 0$$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 1$$

$$u_2^* = 0$$

Análise do modelo: pontos fixos

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 1$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 1$$

Análise do modelo: pontos fixos

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 1$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 1$$

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

$$u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

Análise do modelo: pontos fixos

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 1$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 1$$

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

$$u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

No entanto, a relevância deste pontos fixos depende de sua **estabilidade**.

Análise do modelo: pontos fixos

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 1$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 1$$

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

$$u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

No entanto, a relevância deste pontos fixos depende de sua **estabilidade**. A estabilidade de cada ponto fixo depende dos valores dos parâmetros a_{12} e a_{21} .

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 1$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 1$$

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

$$u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

No entanto, a relevância deste pontos fixos depende de sua **estabilidade**. A estabilidade de cada ponto fixo depende dos valores dos parâmetros a_{12} e a_{21} . Para saber se um ponto fixo é estável ou não devemos fazer uma análise do espaço de fase.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 1$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 1$$

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

$$u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

No entanto, a relevância deste pontos fixos depende de sua **estabilidade**. A estabilidade de cada ponto fixo depende dos valores dos parâmetros a_{12} e a_{21} . Para saber se um ponto fixo é estável ou não devemos fazer uma análise do espaço de fase. Não a faremos aqui explicitamente.

Análise do modelo: pontos fixos

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 1$$

$$u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 0$$

$$u_2^* = 1$$

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

$$u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

No entanto, a relevância deste pontos fixos depende de sua **estabilidade**. A estabilidade de cada ponto fixo depende dos valores dos parâmetros a_{12} e a_{21} . Para saber se um ponto fixo é estável ou não devemos fazer uma análise do espaço de fase. Não a faremos aqui explicitamente. Veja-se o livro de *J.D. Murray (Mathematical Biology)*.



Análise do modelo: estabilidade

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

**Modelo
Matemático**

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Se $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

$$u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

é ESTÁVEL.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Se $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

$$u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

é ESTÁVEL.

Se $a_{12} > 1$ e $a_{21} > 1$

$$u_1^* = 1 \text{ e } u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 0 \text{ e } u_2^* = 1$$

são *ambos* ESTÁVEIS.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Se $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

$$u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

é ESTÁVEL.

Se $a_{12} > 1$ e $a_{21} > 1$

$$u_1^* = 1 \text{ e } u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 0 \text{ e } u_2^* = 1$$

são *ambos* ESTÁVEIS.

Se $a_{12} < 1$ e $a_{21} > 1$

$$u_1^* = 1 \text{ e } u_2^* = 0$$

é ESTÁVEL.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Se $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

$$u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

é ESTÁVEL.

Se $a_{12} > 1$ e $a_{21} > 1$

$$u_1^* = 1 \text{ e } u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 0 \text{ e } u_2^* = 1$$

são *ambos* ESTÁVEIS.

Se $a_{12} < 1$ e $a_{21} > 1$

$$u_1^* = 1 \text{ e } u_2^* = 0$$

é ESTÁVEL.

Se $a_{12} > 1$ e $a_{21} < 1$

$$u_1^* = 0 \text{ e } u_2^* = 1$$

é ESTÁVEL.

Análise do modelo: estabilidade

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Se $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$

$$u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

$$u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}$$

é ESTÁVEL.

Se $a_{12} > 1$ e $a_{21} > 1$

$$u_1^* = 1 \text{ e } u_2^* = 0$$

$$u_1^* = 0 \text{ e } u_2^* = 1$$

são *ambos* ESTÁVEIS.

Se $a_{12} < 1$ e $a_{21} > 1$

$$u_1^* = 1 \text{ e } u_2^* = 0$$

é ESTÁVEL.

Se $a_{12} > 1$ e $a_{21} < 1$

$$u_1^* = 0 \text{ e } u_2^* = 1$$

é ESTÁVEL.

Vemos que a estabilidade dos pontos fixos depende dos valores de a_{12} e a_{21} serem maiores ou menores do que 1.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

**Modelo
Matemático**

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Para se ter uma melhor visão da dinâmica qualitativa, é útil considerar a evolução no espaço de fase.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Para se ter uma melhor visão da dinâmica qualitativa, é útil considerar a evolução no espaço de fase.
- Para cada combinação de a_{12} e a_{21} maiores ou menores do que 1, teremos um retrato de fase diferente.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Para se ter uma melhor visão da dinâmica qualitativa, é útil considerar a evolução no espaço de fase.
- Para cada combinação de a_{12} e a_{21} maiores ou menores do que 1, teremos um retrato de fase diferente.
- A seguir podemos ver dos quatro possíveis casos.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

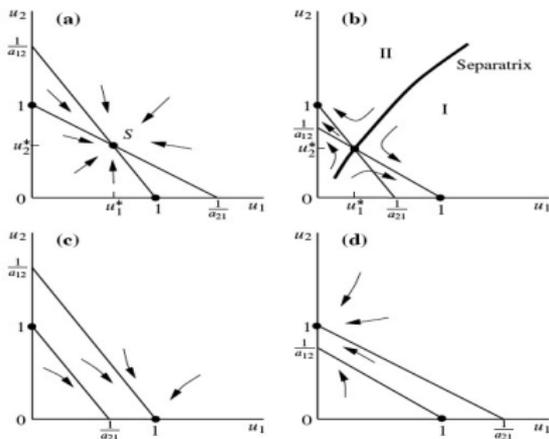


Figura: Os quatro casos possíveis para a estrutura do espaço de fase.

Espaço de fase: coexistência

BIE 5786

R.A. Kraenkel

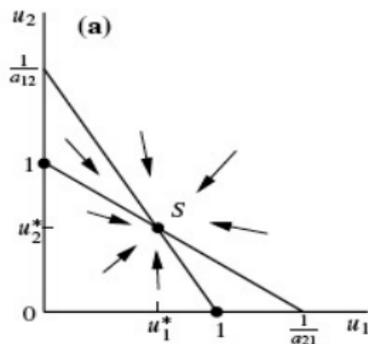
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

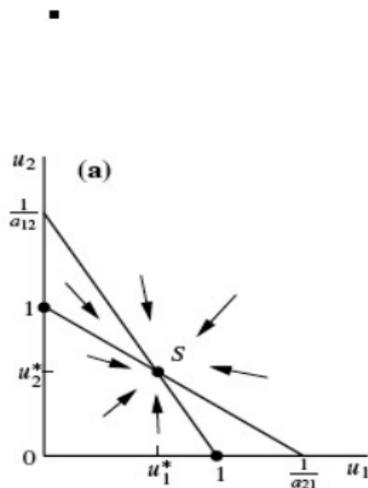


Figura: $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$. Neste caso o ponto fixo u_1^* e u_2^* é estável e representa coexistência das duas espécies. É um **atrator global**.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

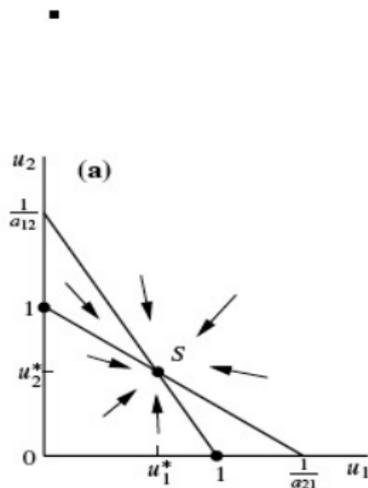


Figura: $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$. Neste caso o ponto fixo u_1^* e u_2^* é estável e representa coexistência das duas espécies. É um **atrator global**.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

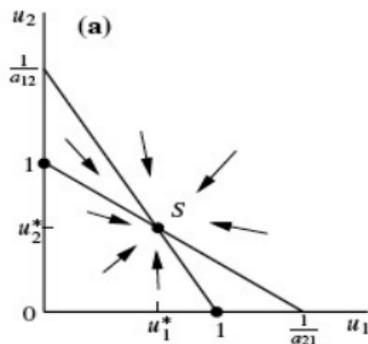


Figura: $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

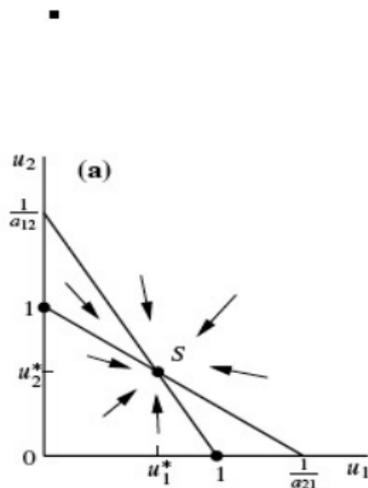


Figura: $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$. Neste caso o ponto fixo u_1^* e u_2^* é estável e representa coexistência das duas espécies.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

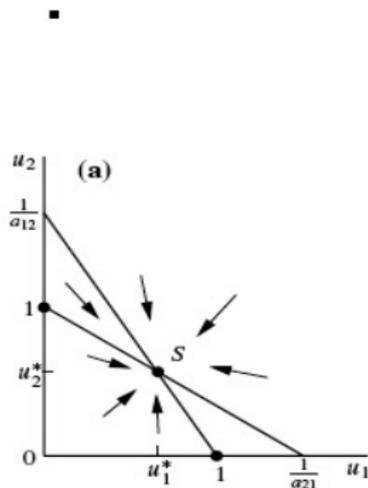


Figura: $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$. Neste caso o ponto fixo u_1^* e u_2^* é estável e representa coexistência das duas espécies. É um **atrator global**.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

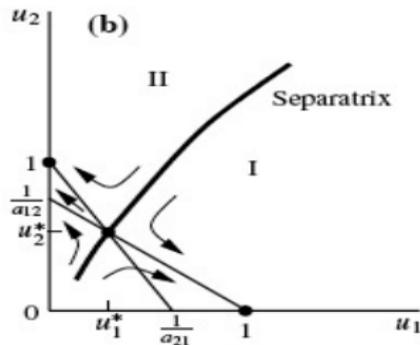
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

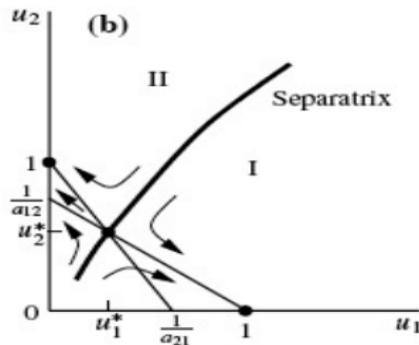


Figura: $a_{12} > 1$ e $a_{21} > 1$. O ponto fixo u_1^* e u_2^* é instável. Os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$ são estáveis, mas tem *bacias de atração* finitas, separadas por uma *separatrix*. Os pontos fixos estáveis representam sempre a **exclusão** de uma espécie.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

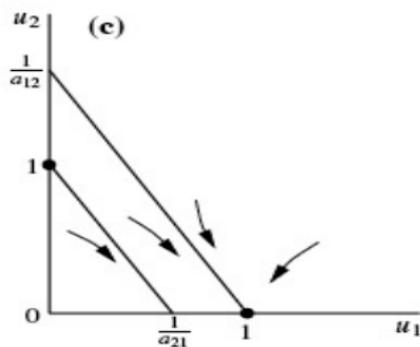
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

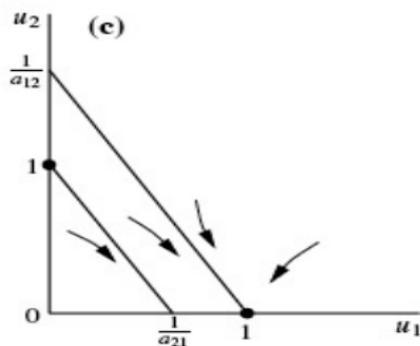


Figura: $a_{12} < 1$ e $a_{21} > 1$. O único ponto fixo estável é $(u_1 = 1, u_2 = 0)$. É um atrator global. A espécie (2) é excluída sempre.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

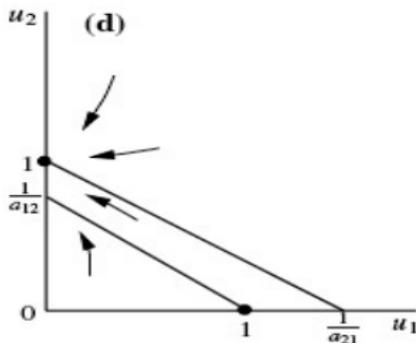


Figura: Caso simétrico ao anterior. $a_{12} > 1$ e $a_{21} < 1$. O único ponto fixo estável é $(u_1 = 1, u_2 = 0)$. É um atrator global. A espécie (1) é excluída sempre.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

**Interpretando
os resultados**

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

**Interpretando
os resultados**

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

**Interpretando
os resultados**

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2. O quanto 1 prejudica 2.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2. O quanto 1 prejudica 2.
- Assim,

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2. O quanto 1 prejudica 2.
- Assim, podemos traduzir intuitivamente:

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2. O quanto 1 prejudica 2.
- Assim, podemos traduzir intuitivamente:
 - $a_{12} > 1$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2. O quanto 1 prejudica 2.
- Assim, podemos traduzir intuitivamente:
 - $a_{12} > 1 \Rightarrow$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2. O quanto 1 prejudica 2.
- Assim, podemos traduzir intuitivamente:
 - $a_{12} > 1 \Rightarrow 2$ compete fortemente com 1 por recursos vitais.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2. O quanto 1 prejudica 2.
- Assim, podemos traduzir intuitivamente:
 - $a_{12} > 1 \Rightarrow$ 2 compete fortemente com 1 por recursos vitais.
 - $a_{21} > 1$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2. O quanto 1 prejudica 2.
- Assim, podemos traduzir intuitivamente:
 - $a_{12} > 1 \Rightarrow$ 2 compete fortemente com 1 por recursos vitais.
 - $a_{21} > 1 \Rightarrow$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2. O quanto 1 prejudica 2.
- Assim, podemos traduzir intuitivamente:
 - $a_{12} > 1 \Rightarrow 2$ compete fortemente com 1 por recursos vitais.
 - $a_{21} > 1 \Rightarrow 1$ compete fortemente com 2 por recursos vitais.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2. O quanto 1 prejudica 2.
- Assim, podemos traduzir intuitivamente:
 - $a_{12} > 1 \Rightarrow 2$ compete fortemente com 1 por recursos vitais.
 - $a_{21} > 1 \Rightarrow 1$ compete fortemente com 2 por recursos vitais.
- Refraseamos então os resultados matemáticos:

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

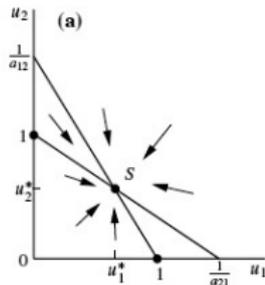
- O que nos diz este resultado?
- Lembremos do significado de a_{12} e a_{21} . eles comparecem no nosso modelo matemático:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 [1 - u_1 - a_{12}u_2]$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 [1 - u_2 - a_{21}u_1]$$

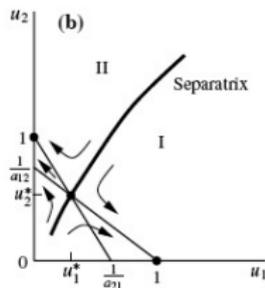
- a_{12} mede a influência da espécie 2 sobre a espécie 1. O quanto 2 prejudica 1.
- a_{21} mede a influência da espécie 1 sobre a espécie 2. O quanto 1 prejudica 2.
- Assim, podemos traduzir intuitivamente:
 - $a_{12} > 1 \Rightarrow 2$ compete fortemente com 1 por recursos vitais.
 - $a_{21} > 1 \Rightarrow 1$ compete fortemente com 2 por recursos vitais.
- Refraseamos então os resultados matemáticos:

Se $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$
 A competição mútua é **fraca** e ambos podem coexistir.



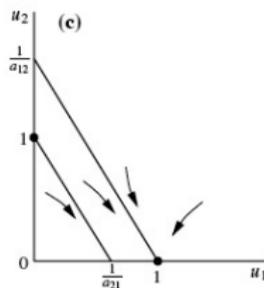
Se $a_{12} > 1$ e $a_{21} > 1$

A competição é mutuamente **forte**. Sempre uma das espécies elimina a outra. A qual prevalecerá depende das condições iniciais.



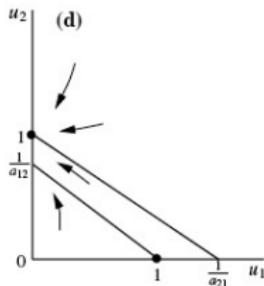
Se $a_{12} < 1$ e $a_{21} > 1$

A espécie 1 não é muito prejudicada pela espécie 2. Já a espécie 2 é prejudicada pela espécie 1. O resultado é a eliminação da espécie 2 e a espécie 1 cresce até atingir sua capacidade de suporte.



Se $a_{12} > 1$ e $a_{21} < 1$

Caso simétrico ao anterior. A espécie 2 não é muito prejudicada pela espécie 1. Já a espécie 1 é prejudicada pela espécie 2. O resultado é a eliminação da espécie 1 e a espécie 2 cresce até atingir sua capacidade de suporte.



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

**Interpretando
os resultados**

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Em suma,

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

**Interpretando
os resultados**

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Em suma, o modelo matemático prevê que se os competidores forem “fortes” um elimina o outro.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Em suma, o modelo matemático prevê que se os competidores forem “fortes” um elimina o outro.
- Apenas se a competição for fraca haverá coexistência.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Em suma, o modelo matemático prevê que se os competidores forem “fortes” um elimina o outro.
- Apenas se a competição for fraca haverá coexistência.
- O fato de dentre dois competidores o mais forte eliminar o mais fraco, chama-se **princípio da exclusão competitiva**.

Exclusão competitiva

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- Em suma, o modelo matemático prevê que se os competidores forem “fortes” um elimina o outro.
- Apenas se a competição for fraca haverá coexistência.
- O fato de dentre dois competidores o mais forte eliminar o mais fraco, chama-se **princípio da exclusão competitiva**.



Georgiy F. Gause (1910-1986), biólogo russo, foi o formulador do princípio de exclusão competitiva a partir de experiências realizadas com micro-organismos (1932).

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

As experiências de G.F. Gause foram realizadas com um grupo de protozoários chamado de *Paramecia*.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

As experiências de G.F. Gause foram realizadas com um grupo de protozoários chamado de *Paramecia*.
Gause estudou dois deles: *Paramecium aurelia* e *Paramecium Caudatum*.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

As experiências de G.F. Gause foram realizadas com um grupo de protozoários chamado de *Paramecia*.

Gause estudou dois deles: *Paramecium aurelia* e *Paramecium Caudatum*. Foram inicialmente crescidos em culturas separadas, constatando-se um crescimento do tipo logístico.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

As experiências de G.F. Gause foram realizadas com um grupo de protozoários chamado de *Paramecia*.

Gause estudou dois deles: *Paramecium aurelia* e *Paramecium Caudatum*. Foram inicialmente crescidos em culturas separadas, constatando-se um crescimento do tipo logístico.

Quando colocados na mesma cultura, o *P. aurelia* sobrevive e o *P. caudatum* é eliminado.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

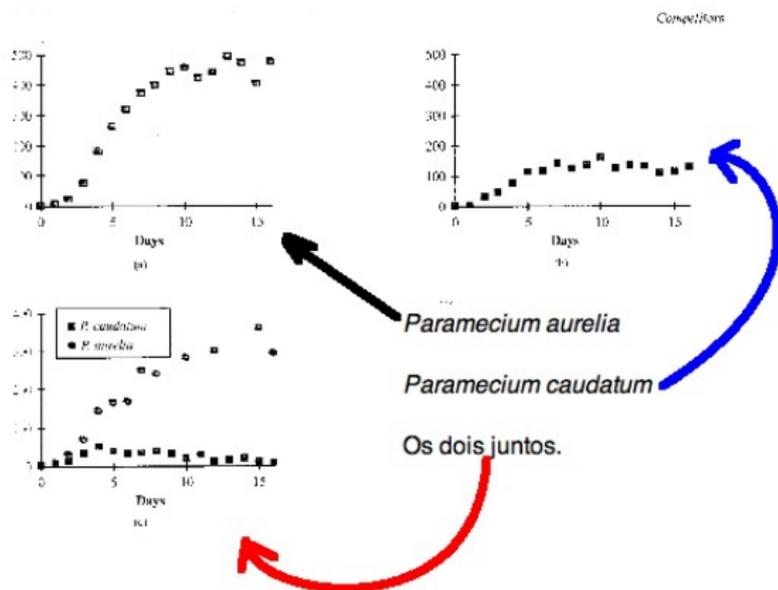
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



BIE 5786

R.A. Kraenkel

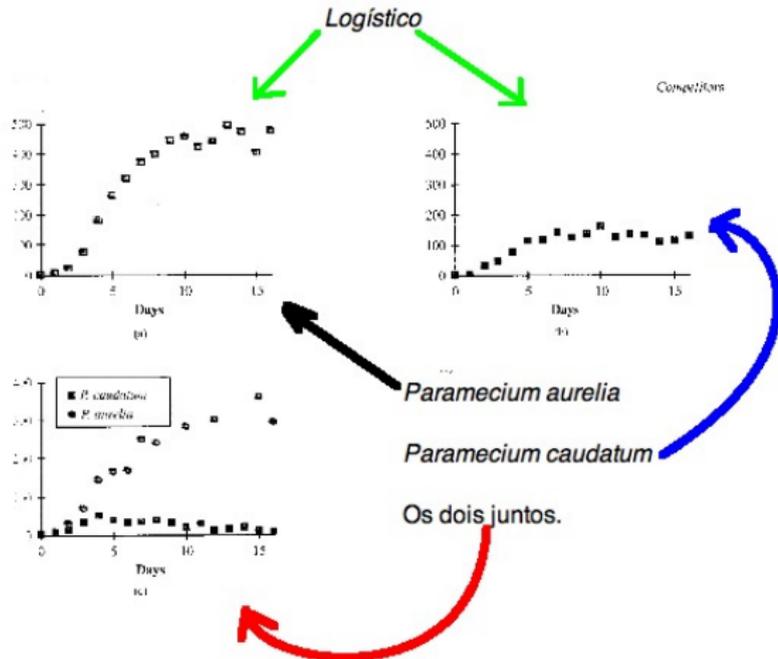
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



BIE 5786

R.A. Kraenkel

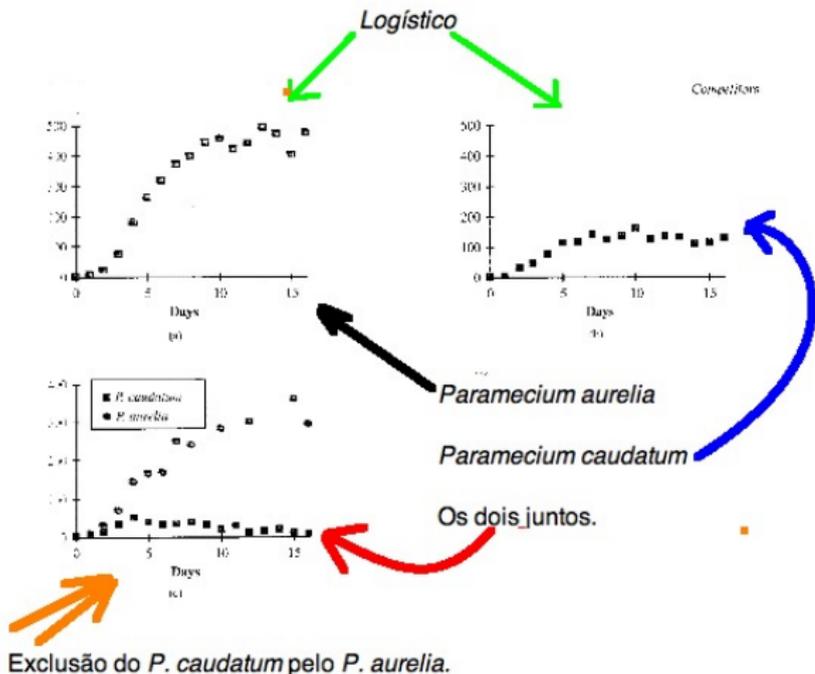
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

**Protozoários,
formigas e
plankton!**

Muitas
espécies



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies



Figura: A formiga argentina (*Linepithema humile*) e a formiga californiana (*Pogonomyrmex californicus*)

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies



Figura: A formiga argentina (*Linepithema humile*) e a formiga californiana (*Pogonomyrmex californicus*)

- A introdução formiga argentina na Califórnia teve como efeito provocar o desaparecimento da espécie *Pogonomyrmex californicus*.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies



Figura: A formiga argentina (*Linepithema humile*) e a formiga californiana (*Pogonomyrmex californicus*)

- A introdução formiga argentina na Califórnia teve como efeito provocar o desaparecimento da espécie *Pogonomyrmex californicus*.
- Vejamos um diagrama na transparência seguinte.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies



Figura: A formiga argentina (*Linepithema humile*) e a formiga californiana (*Pogonomyrmex californicus*)

- A introdução formiga argentina na Califórnia teve como efeito provocar o desaparecimento da espécie *Pogonomyrmex californicus*.
- Vejamos um diagrama na transparência seguinte.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

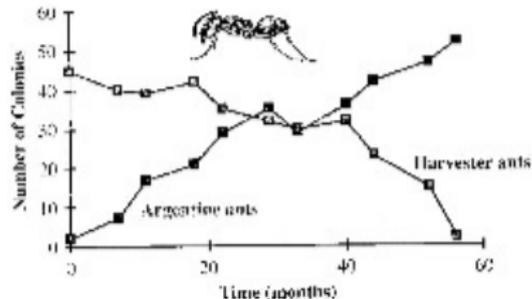
Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plâncton!

Muitas espécies

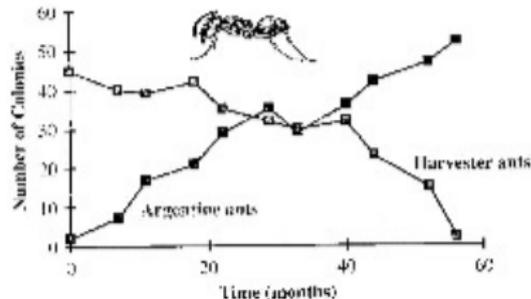


Figura: A formiga argentina (*Linepithema humile*) elimina a formiga californiana (*Pogonomyrmex californicus*)

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

**Protozoários,
formigas e
plankton!**

Muitas
espécies

- A propósito das formigas...

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

**Protozoários,
formigas e
plankton!**

Muitas
espécies

- A propósito das formigas...
- Trata-se de um caso de competição por interferência.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- A propósito das formigas...
- Trata-se de um caso de competição por interferência.
- As dietas da duas formigas são diferentes, de modo que não competem por alimento.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- A propósito das formigas...
- Trata-se de um caso de competição por interferência.
- As dietas da duas formigas são diferentes, de modo que não competem por alimento.
- A formiga argentina tem vantagens competitivas mesmo sendo menor.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- A propósito das formigas...
- Trata-se de um caso de competição por interferência.
- As dietas da duas formigas são diferentes, de modo que não competem por alimento.
- A formiga argentina tem vantagens competitivas mesmo sendo menor. Usa de estratégias de ação coletiva.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- A propósito das formigas...
- Trata-se de um caso de competição por interferência.
- As dietas da duas formigas são diferentes, de modo que não competem por alimento.
- A formiga argentina tem vantagens competitivas mesmo sendo menor. Usa de estratégias de ação coletiva.
- Não se sabe exatamente por que a formiga argentina ataca a californiana.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- A propósito das formigas...
- Trata-se de um caso de competição por interferência.
- As dietas da duas formigas são diferentes, de modo que não competem por alimento.
- A formiga argentina tem vantagens competitivas mesmo sendo menor. Usa de estratégias de ação coletiva.
- Não se sabe exatamente por que a formiga argentina ataca a californiana.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

**Protozoários,
formigas e
plankton!**

Muitas
espécies

Tendo em mente o princípio da exclusão competitiva, consideremos a situação do *phytoplankton*.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

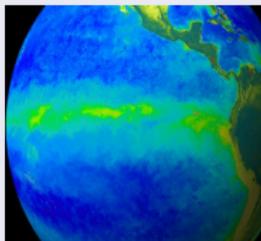
Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Tendo em mente o princípio da exclusão competitiva, consideremos a situação do *phytoplankton*.



- Phytoplankton é um grupo de organismos que vive nos mares e lagos, em profundidades em que haja luz.



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

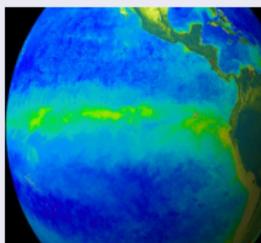
Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Tendo em mente o princípio da exclusão competitiva, consideremos a situação do *phytoplankton*.



- Phytoplankton é um grupo de organismos que vive nos mares e lagos, em profundidades em que haja luz.
- Quando em grande quantidade pode ser visto como uma coloração d'água, por satélite.



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

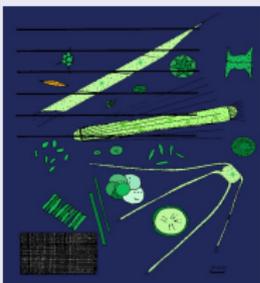
Modelo Matemático

Interpretando os resultados

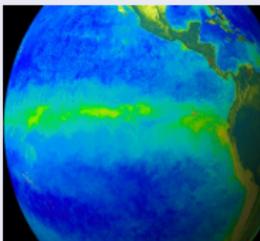
Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

Tendo em mente o princípio da exclusão competitiva, consideremos a situação do *phytoplankton*.



- Phytoplankton é um grupo de organismos que vive nos mares e lagos, em profundidades em que haja luz.
- Quando em grande quantidade pode ser visto como uma coloração d'água, por satélite.
- O phytoplankton é um foto-autótrofo: produz componentes orgânicos a partir de luz + molécula inorgânicas.



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

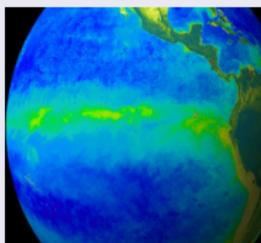
Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

Tendo em mente o princípio da exclusão competitiva, consideremos a situação do *phytoplankton*.



- Phytoplankton é um grupo de organismos que vive nos mares e lagos, em profundidades em que haja luz.
- Quando em grande quantidade pode ser visto como uma coloração d'água, por satélite.
- O phytoplankton é um foto-autótrofo: produz componentes orgânicos a partir de luz + molécula inorgânicas.
- Produz oxigênio pela fotossíntese.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

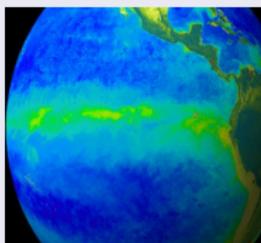
Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

Tendo em mente o princípio da exclusão competitiva, consideremos a situação do *phytoplankton*.



- Phytoplankton é um grupo de organismos que vive nos mares e lagos, em profundidades em que haja luz.
- Quando em grande quantidade pode ser visto como uma coloração d'água, por satélite.
- O phytoplankton é um foto-autótrofo: produz componentes orgânicos a partir de luz + molécula inorgânicas.
- Produz oxigênio pela fotossíntese.
- Há centenas de espécies de phytoplankton.

O paradoxo do plankton

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

**Protozoários,
formigas e
plankton!**

Muitas
espécies

- O paradoxo do plankton consiste no seguinte:

O paradoxo do plankton

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

**Protozoários,
formigas e
plankton!**

Muitas
espécies

- O paradoxo do plankton consiste no seguinte:
- Como podem existir tantas espécies convivendo em poucos milímetros quadrados de um lago ou no oceano?

O paradoxo do plankton

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O paradoxo do plankton consiste no seguinte:
- Como podem existir tantas espécies convivendo em poucos milímetros quadrados de um lago ou no oceano?
 - Todas as espécies competem pelos mesmo nutrientes (CO_2 , nitrogênio, fósforo,...).

O paradoxo do plankton

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O paradoxo do plankton consiste no seguinte:
- Como podem existir tantas espécies convivendo em poucos milímetros quadrados de um lago ou no oceano?
 - Todas as espécies competem pelos mesmo nutrientes (CO_2 , nitrogênio, fósforo,...).
 - Ao menos nos meses do verão, a competição deve ser forte, pois há poucos nutrientes,

O paradoxo do plankton

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O paradoxo do plankton consiste no seguinte:
- Como podem existir tantas espécies convivendo em poucos milímetros quadrados de um lago ou no oceano?
 - Todas as espécies competem pelos mesmo nutrientes (CO_2 , nitrogênio, fósforo,...).
 - Ao menos nos meses do verão, a competição deve ser forte, pois há poucos nutrientes,
 - Pela ação do vento, a água está “bem misturada”.

O paradoxo do plankton

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O paradoxo do plankton consiste no seguinte:
- Como podem existir tantas espécies convivendo em poucos milímetros quadrados de um lago ou no oceano?
 - Todas as espécies competem pelos mesmo nutrientes (CO_2 , nitrogênio, fósforo,...).
 - Ao menos nos meses do verão, a competição deve ser forte, pois há poucos nutrientes,
 - Pela ação do vento, a água está “bem misturada”.
- O princípio da exclusão competitiva diria que o mais forte eliminaria o mais fraco.

O paradoxo do plankton

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- O paradoxo do plankton consiste no seguinte:
- Como podem existir tantas espécies convivendo em poucos milímetros quadrados de um lago ou no oceano?
 - Todas as espécies competem pelos mesmo nutrientes (CO_2 , nitrogênio, fósforo,...).
 - Ao menos nos meses do verão, a competição deve ser forte, pois há poucos nutrientes,
 - Pela ação do vento, a água está “bem misturada”.
- O princípio da exclusão competitiva diria que o mais forte eliminaria o mais fraco.
- Deveriam sobrar apenas aqueles que fossem os eficientes consumidores de cada um dos recursos.



Um paradoxo, muitas respostas

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

**Protozoários,
formigas e
plankton!**

Muitas
espécies

Um paradoxo, muitas respostas

BIE 5786

R.A. Kraenkel

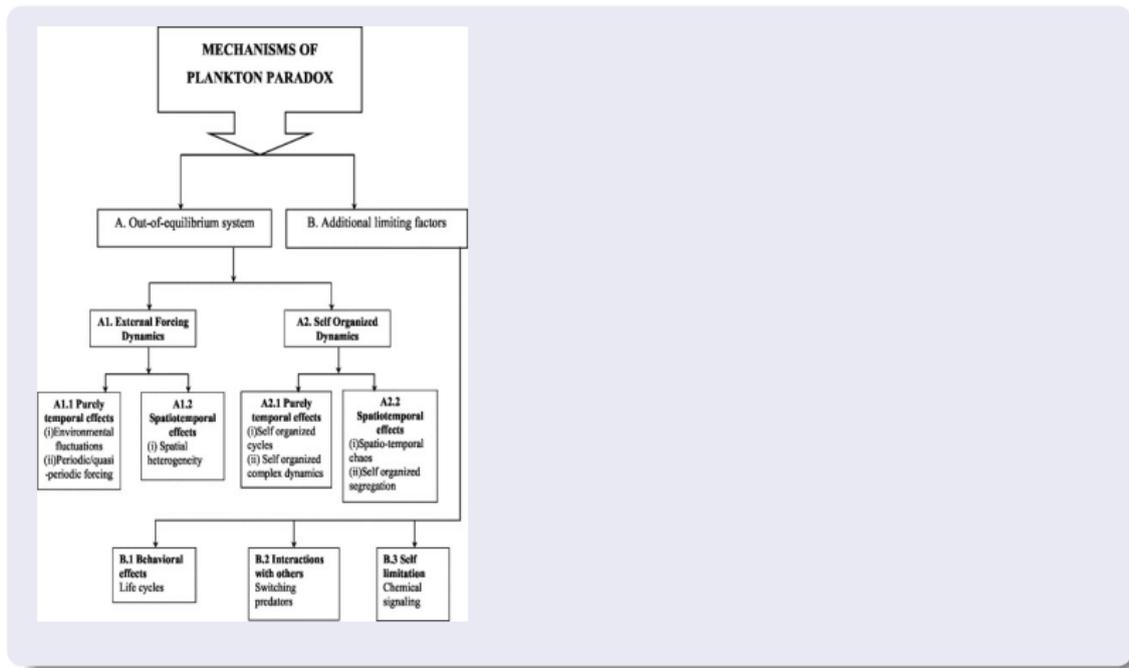
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



Um paradoxo, muitas respostas

BIE 5786

R.A. Kraenkel

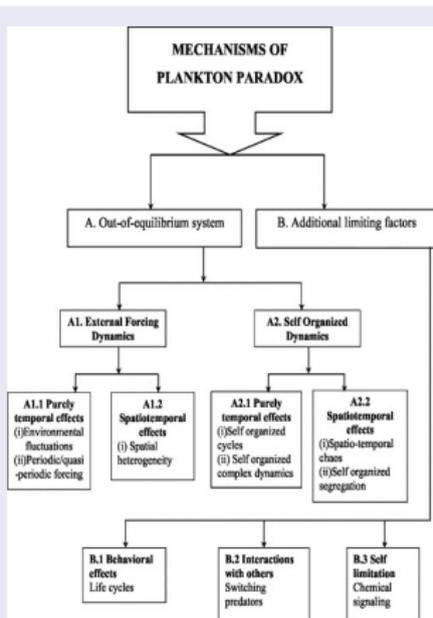
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



- A exclusão competitiva vale no ponto de **equilíbrio**:

Um paradoxo, muitas respostas

BIE 5786

R.A. Kraenkel

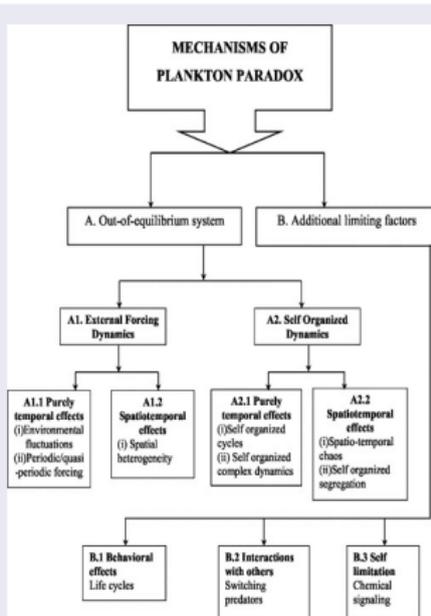
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



- A exclusão competitiva vale no ponto de **equilíbrio**: se o ambiente mudar (por causa das estações , p. ex.), o equilíbrio pode não ser atingido.

Um paradoxo, muitas respostas

BIE 5786

R.A. Kraenkel

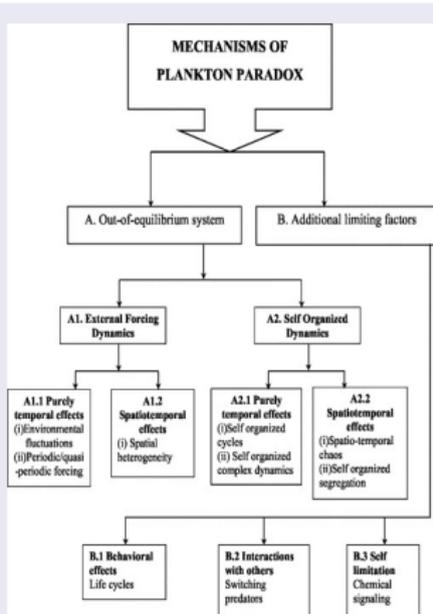
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



- A exclusão competitiva vale no ponto de **equilíbrio**: se o ambiente mudar (por causa das estações , p. ex.), o equilíbrio pode não ser atingido.
- Não levamos em conta a distribuição espacial.

Um paradoxo, muitas respostas

BIE 5786

R.A. Kraenkel

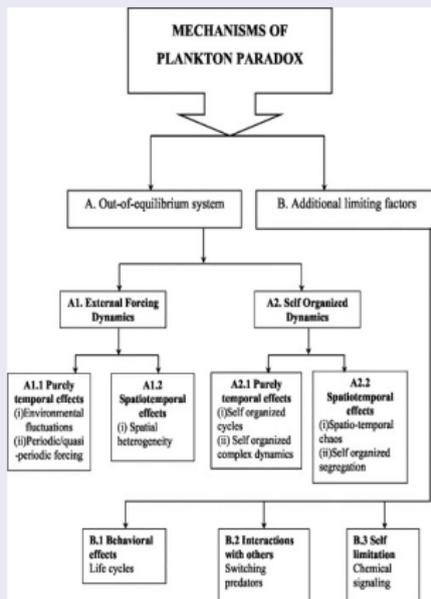
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



- A exclusão competitiva vale no ponto de **equilíbrio**: se o ambiente mudar (por causa das estações , p. ex.), o equilíbrio pode não ser atingido.
- Não levamos em conta a distribuição espacial. Esta pode causar diferenciação por regiões.

Um paradoxo, muitas respostas

BIE 5786

R.A. Kraenkel

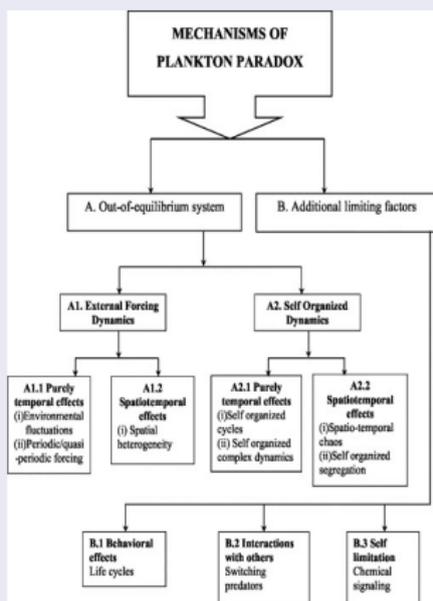
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



- A exclusão competitiva vale no ponto de **equilíbrio**: se o ambiente mudar (por causa das estações , p. ex.), o equilíbrio pode não ser atingido.
- Não levamos em conta a distribuição espacial. Esta pode causar diferenciação por regiões.
- Ademais, podem haver heterogeneidades espaciais.

Um paradoxo, muitas respostas

BIE 5786

R.A. Kraenkel

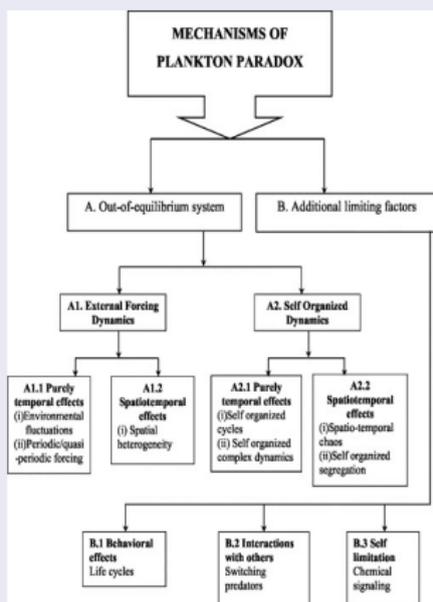
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



- A exclusão competitiva vale no ponto de **equilíbrio**: se o ambiente mudar (por causa das estações , p. ex.), o equilíbrio pode não ser atingido.
- Não levamos em conta a distribuição espacial. Esta pode causar diferenciação por regiões.
- Ademais, podem haver heterogeneidades espaciais.
- Pode haver um acoplamento com as espécies predadoras.

Um paradoxo, muitas respostas

BIE 5786

R.A. Kraenkel

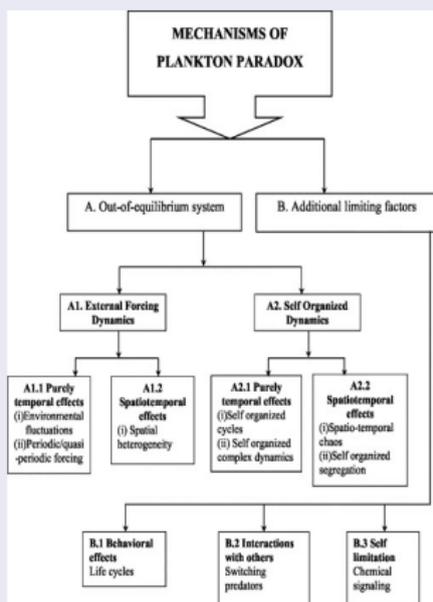
Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies



- A exclusão competitiva vale no ponto de **equilíbrio**: se o ambiente mudar (por causa das estações , p. ex.), o equilíbrio pode não ser atingido.
- Não levamos em conta a distribuição espacial. Esta pode causar diferenciação por regiões.
- Ademais, podem haver heterogeneidades espaciais.
- Pode haver um acoplamento com as espécies predadoras.



Respostas demais!

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

**Protozoários,
formigas e
plankton!**

Muitas
espécies

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

**Protozoários,
formigas e
plankton!**

Muitas
espécies

- A situação do plankton ilustra bem a modelagem matemática de sistemas biológicos.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

**Protozoários,
formigas e
plankton!**

Muitas
espécies

- A situação do plankton ilustra bem a modelagem matemática de sistemas biológicos.
- É difícil estabelecer de forma clara quais mecanismos tem relevância na explicação de um dado fenômeno.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- A situação do plankton ilustra bem a modelagem matemática de sistemas biológicos.
- É difícil estabelecer de forma clara quais mecanismos tem relevância na explicação de um dado fenômeno.
- Por vezes, vários mecanismos propostos podem explicar um fenômeno.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- A situação do plankton ilustra bem a modelagem matemática de sistemas biológicos.
- É difícil estabelecer de forma clara quais mecanismos tem relevância na explicação de um dado fenômeno.
- Por vezes, vários mecanismos propostos podem explicar um fenômeno.
- Qual é o bom?

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- A situação do plankton ilustra bem a modelagem matemática de sistemas biológicos.
- É difícil estabelecer de forma clara quais mecanismos tem relevância na explicação de um dado fenômeno.
- Por vezes, vários mecanismos propostos podem explicar um fenômeno.
- Qual é o bom?
- Na física, poderíamos propor experiências de laboratório.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- A situação do plankton ilustra bem a modelagem matemática de sistemas biológicos.
- É difícil estabelecer de forma clara quais mecanismos tem relevância na explicação de um dado fenômeno.
- Por vezes, vários mecanismos propostos podem explicar um fenômeno.
- Qual é o bom?
- Na física, poderíamos propor experiências de laboratório.
- No caso da ecologia, por exemplo, isto está longe de ser trivial!.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

- A situação do plankton ilustra bem a modelagem matemática de sistemas biológicos.
- É difícil estabelecer de forma clara quais mecanismos tem relevância na explicação de um dado fenômeno.
- Por vezes, vários mecanismos propostos podem explicar um fenômeno.
- Qual é o bom?
- Na física, poderíamos propor experiências de laboratório.
- No caso da ecologia, por exemplo, isto está longe de ser trivial!
- **A VIDA DE UM CIENTISTA NÃO É FÁCIL!**



Muitas espécies

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

**Muitas
espécies**

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

**Muitas
espécies**

Podemos generalizar nosso modelo matemático de duas para mais espécies de forma imediata:

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Podemos generalizar nosso modelo matemático de duas para mais espécies de forma imediata:

$$\frac{dN_i}{dt} = r_i N_i \left[1 - \sum_{j=1}^n b_{ij} N_j \right]$$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Podemos generalizar nosso modelo matemático de duas para mais espécies de forma imediata:

$$\frac{dN_i}{dt} = r_i N_i \left[1 - \sum_{j=1}^n b_{ij} N_j \right]$$

onde b_{ij} é a força da influência competitiva da espécie j sobre a espécie i .

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo
Matemático

Interpretando
os resultados

Protozoários,
formigas e
plankton!

Muitas
espécies

Podemos generalizar nosso modelo matemático de duas para mais espécies de forma imediata:

$$\frac{dN_i}{dt} = r_i N_i \left[1 - \sum_{j=1}^n b_{ij} N_j \right]$$

onde b_{ij} é a força da influência competitiva da espécie j sobre a espécie i .

Fizemos aqui uma suposição, de que a competição se dá de forma binária. De duas em duas espécies. Isto é normalmente verdade, mas.... as vezes não é.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Competição

Modelo Matemático

Interpretando os resultados

Protozoários, formigas e plankton!

Muitas espécies

- Ilustremos por fim, pela figura abaixo, alguns módulos de poucas espécies (ditos módulos de comunidade).

