

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

BIE 5786 - Ecologia de Populações

Roberto André Kraenkel

<http://www.ift.unesp.br/users/kraenkel>

Apontamentos de Cálculo Diferencial e Integral
Parte II

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

1 Operações Inversas

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

1 Operações Inversas

2 Integral

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

1 Operações Inversas

2 Integral

3 Áreas

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

1 Operações Inversas

2 Integral

3 Áreas

4 Densidades

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

1 Operações Inversas

2 Integral

3 Áreas

4 Densidades

5 Fim

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Exemplos

- Vamos nos ocupar de *operações inversas*: aquelas que o tem efeito inverso que uma outra operação.
- Tomemos por exemplo a operação: "elevar ao quadrado": ela pega um número e o eleva ao quadrado.
- Seja um número x . Chamemos o seu quadrado de y :
- $y = x^2$
- Qual é a operação inversa de "elevar ao quadrado"?
- É $x = \sqrt{y} = y^{1/2}$
- É a operação que pega um número (y) e acha um outro (x), tal que "o quadrado desse número (x)" é o número inicial (y).
- Aplicar uma operação e em seguida a sua inversa resulta em uma identidade:
- Elevar ao um número x quadrado : $y = x^2$ e depois tirar a raiz $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = x$ resultou no próprio x .

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Exemplos II

- Assim, temos que:
- A inversa de e^x é $\ln(x)$, pois $\ln(e^x) = x$.
- A inversa de "somar 5" é "subtrair 5", pois $x + 5 - 5 = x$.
- A inversa de "multiplicar por 2" é "dividir por 2", pois $(2x)/2 = x$.
- A inversa de $\sin(x)$ é o $\arcsin(x)$: o arco cujo seno é x .

E agora nos perguntamos qual é a inversa da operação de derivação.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Diferenciação e sua Inversa

- Lembremos da derivada.
- Temos uma **função**, $f(x)$.
- Podemos calcular a sua derivada $\frac{df}{dx}$.
- A sua derivada é uma nova função.
- Veja a analogia:
- Elevar um número ao quadrado, nos fornece um novo número.
- A operação anterior (chamada de potenciação) leva números em números.
- E a sua inversa ("tirar a raiz"), também.
- A operação "tomar a derivada de $f(x)$ "(chamada de diferenciação) leva uma **função** noutra **função**.
- Assim, a operação inversa da diferenciação tem que também levar uma **função** noutra **função**.
- Provisoriamente, chamemos esta operação de **antiderivada**.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Um primeiro cálculo

- A antiderivada deve portanto "desfazer" a operação de derivação.
- Seja por exemplo

$$f(x) = x^2$$

- Vimos que neste caso

$$\frac{df}{dx} = 2x$$

- Assim, a antiderivada da função

$$g(x) = 2x$$

- é

$$x^2$$

pois x^2 é a função cuja derivada é $2x$.

Notação e nomenclatura

- Você notou que ainda não introduzimos uma notação para a antiderivada
- Aqui vai:

A antiderivada da função $f(x)$ é denotada por $\int^x f(x)dx$

Assim, por exemplo:

$$\int^x (2x)dx = x^2$$

- Vamos agora dar um novo nome para a antiderivada: **integral indefinida**.
- Lê-se a expressão acima como : *a integral indefinida de $2x$ é x^2* .
 - O adjetivo indefinida é muitas vezes omitido. Adiante veremos que existe um outro objeto matemático chamado de *integral definida*.
 - Muitas vezes chama-se a integral indefinida de uma função de **primitiva**. Não usaremos esta nomenclatura extensamente aqui, mas é bom conhecê-la. Assim, a primitiva de $2x$ é x^2 .

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Somando constantes

- Voltemos ao exemplo acima



$$\int^x (2x)dx = x^2 \quad ,$$

pois $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$

- Mas veja que

$$\frac{d(x^2 + K)}{dx} = 2x \quad ,$$

onde K é qualquer constante.

- Assim, podemos escrever que

$$\int^x (2x)dx = x^2 + K$$

Conclusão: Sempre podemos somar uma constante arbitrária ao resultado de uma integral indefinida.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Alguns cálculos

- Vamos então obter algumas integrais indefinidas a partir de sua definição.
- A integral indefinida de uma função $f(x)$ é a uma outra função, $g(x)$, cuja derivada é $f(x)$.

•

$$\int^x x dx = \frac{x^2}{2} \quad \text{pois} \quad \frac{d(x^2/2)}{dx} = x$$

•

$$\int^x x^2 dx = \frac{x^3}{3} \quad \text{pois} \quad \frac{d(x^3/3)}{dx} = x^2$$

•

$$\int^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{pois} \quad \frac{d(x^{n+1}/(n+1))}{dx} = x^n$$

•

$$\int^x 5x dx = \frac{5x^2}{2} \quad \text{pois} \quad \frac{d(5x^2/2)}{dx} = 5x$$

aonde ainda podemos somar uma constante a cada resultado.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Alguns cálculos, *bis*

- $$\int e^x dx = e^x \quad \text{pois} \quad \frac{de^x}{dx} = e^x$$
- $$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \quad \text{pois} \quad \frac{d\frac{e^{2x}}{2}}{dx} = e^{2x}$$
- $$\int e^{Kx} dx = \frac{e^{Kx}}{K} \quad \text{pois} \quad \frac{d\frac{e^{Kx}}{K}}{dx} = e^{Kx}$$
- $$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \quad \text{pois} \quad \frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

aonde ainda podemos somar uma constante a cada resultado.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Alguns cálculos, *ter*

- $$\int^x \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1) \quad \text{pois} \quad \frac{d[x(\ln(x) - 1)]}{dx} = \ln(x)$$

- $$\int^x \sin(x) dx = -\cos(x) \quad \text{pois} \quad \frac{d(-\cos(x))}{dx} = \sin(x)$$

$$\int^x \sin(Kx) dx = \frac{-\cos(x)}{K} \quad \text{pois} \quad \frac{d(-\cos(x)/K)}{dx} = \sin(Kx)$$

$$\int^x \cos(x) dx = \sin(x) \quad \text{pois} \quad \frac{d(\sin(x))}{dx} = \cos(x)$$

aonde ainda podemos somar uma constante a cada resultado.

Alguns cálculos, *quater*

Podemos continuar a nossa brincadeira invertendo tabelas de derivação:

Função	Derivada
xe^x	$(x + 1)e^x$
$\sin(x^2)$	$2x \cdot \cos(x^2)$
$x \cdot \sin(2x)$	$\sin(2x) + 4x \cos(2x)$

Função	Integral
$(x + 1)e^x$	xe^x
$2x \cdot \cos(x^2)$	$\sin(x^2)$
$\sin(2x) + 4x \cos(2x)$	$x \cdot \sin(2x)$

aonde ainda podemos somar uma constante a cada resultado da integral acima.

Tem um ótimo texto sobre integração, com exemplos, na página

http://www.tech.plym.ac.uk/maths/resources/PDFLaTeX/indef_integrals.pdf

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Algumas regras

- O processo de integração não é tão simples quanto do de derivação.
- Muitas vezes recorreremos a tabelas de integrais,
- Ou a softwares que tem capacidade de manipulação algébrica
- Por exemplo: Mathematica ou Maxima.
- Mas devemos ter em mente algumas regras simples:

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Algumas regras, *bis*

-

$$\int dx = x$$

- Da própria definição de integral indefinida:

$$\int \frac{df}{dx} dx = f(x)$$

-

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$$

onde A é uma constante (ou uma função que não depende de x).

-

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

- Mas note que a integral do produto **não** é o produto das integrais.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Áreas

- Você se lembra que no fim de nossa discussão sobre derivadas demos uma interpretação para derivada como sendo a inclinação da curva tangente ao gráfico da função que estamos derivando.
- A integral também pode ser interpretada geometricamente.
- Está relacionada à área embaixo de uma curva.
- Vejamos.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

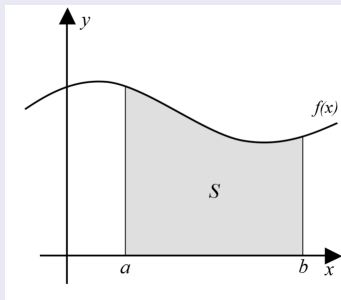
Integral

Áreas

Densidades

Fim

Área embaixo de uma curva



- Aí está o gráfico da função $f(x)$ e a área embaixo da curva entre os pontos a e b .
- Como podemos calculá-la?

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

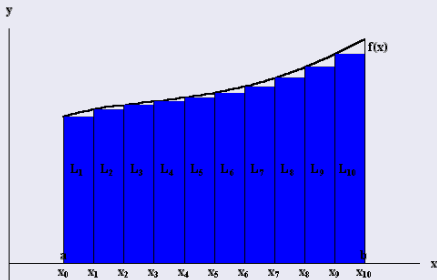
Integral

Áreas

Densidades

Fim

Área embaixo de uma curva, *bis*



- Uma forma de calcular a área é somar a área de todos os retângulos da figura acima.
- Mas note que tem sempre um pequeno erro nisto.
- Mas quanto mais retângulos tivermos, cada vez menores, mais próximos estaremos da área real.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

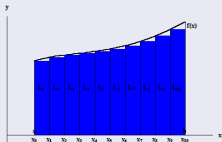
Integral

Áreas

Densidades

Fim

Área embaixo de uma curva, *ter*



- A área total embaixo do gráfico é portanto a soma de um número infinito de retângulos cujas bases são infinitesimais.
- Chamamos de dx o comprimento de cada base.
- A área de cada retângulo será $f(x)dx$.
- E a área total será a soma de todos estas área, e a denotamos por:

$$\int_b^a f(x)dx$$

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Integrais

- A notação usada para representar a área debaixo de uma curva é sugestiva;
- Mas o que a esta área tem a ver com a integral indefinida (que era, como vimos, uma antiderivada).
- Há um teorema que diz (é o teorema fundamental do cálculo) :

$$\int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_b^b f(x)dx$$

aonde as integrais do lado direito são as integrais indefinidas de $f(x)$ calculadas nos pontos a e b .

- A integral do lado esquerdo é chamada de "integral definida de $f(x)$ entre a e b ".

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

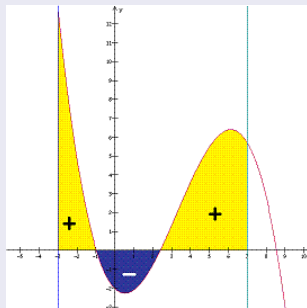
Áreas

Densidades

Fim

Integrais, *bis*

- Só que temos que ter cuidado:
- As áreas das quais falamos tem sinal:



- A parte negativa conta com sinal negativo.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Densidades

- Voltemos agora a alguns conceitos que podemos usar em biologia de populações.
- Muitas das medidas que podemos fazer são de número de indivíduos por área.
- Ou seja a densidade de indivíduos.
- Se estudamos uma certa população, esta densidade pode variar de ponto para ponto.
- Há lugares mais fortemente populados e outros menos.
- E se quisermos saber a população total numa certa região?

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

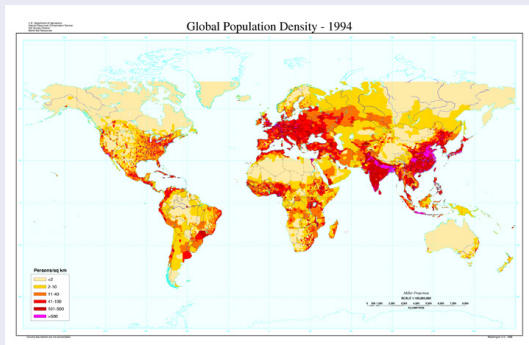
Integral

Áreas

Densidades

Fim

Densidade e População Total



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

Densidade e População Total, *bis*

- Na página anterior mostra-se um mapa da densidade de pessoas no mundo.
- Para saber a população total do mundo você poderia:
 - Dividir o mundo em minúsculas regiões;
 - calcular a população de cada uma destas regiões multiplicando a densidade pela área;
 - somar as populações de todas as regiões
 - Em suma você quer calcular a integral definida da densidade....
 - Ou seja:

$$\text{Número total de Indivíduos entre os pontos } a \text{ e } b = \int_b^a \rho(x) dx$$

onde $\rho(x)$ é a densidade da população no ponto x .

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Operações
Inversas

Integral

Áreas

Densidades

Fim

O que devo lembrar

- A integração indefinida é a operação inversa da diferenciação.
- Ou seja: a integral indefinida de $f(x)$ é uma outra função $g(x)$ tal que a derivada de desta é a primeira função, $f(x)$.
- Podemos relacionar a integral indefinida com o cálculo de áreas (com sinal) debaixo da curva do gráfico de $f(x)$..
- Usamos isso no dia-a-dia para obter, por exemplo, populações totais a partir de densidades populacionais.