# BIE 5786 - Ecologia de Populações

Roberto André Kraenkel

http://www.ift.unesp.br/users/kraenkel

Apontamentos de Cálculo Diferencial e Integral
Parte I

# Sumário

# Sumário

# Sumário

# Sumário

# Sumário

# Sumário

# Sumário

# Sumário

# Sumário

*Differential calculus is more interesting because it describes how things change.*

*G. Evelyn Hutchinson*
*citado por T.E. Lovejoy*

# Números



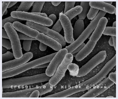
## O que medimos são números.

- Boa parte das medidas que realizamos em ecologia resultam em números.
- Este números representam um certo sistema num dado momento do tempo e numa certa região do espaço.
- E esses números podem mudar: tanto no tempo quanto no espaço.
- Para quantificar estas variações usamos a idéia de taxa de variação.
- A tradução matemática da idéia de taxa de variação é o que dá origem ao *cálculo diferencial*.

# Funções



## Um filme



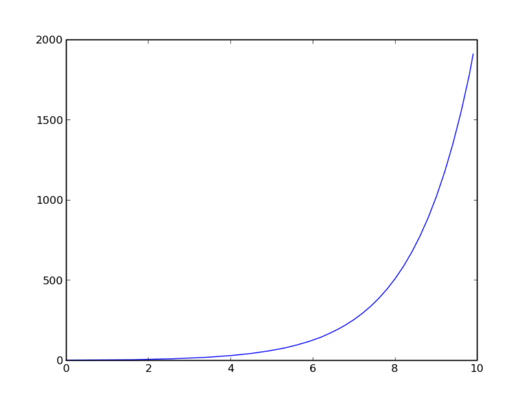

## Descrevendo o filme com números

| Tempo (s) | Bactérias |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 4 |
| 2 | 8 |
| 3 | 16 |
| 4 | 32 |
| 5 | 64 |
| 14 | 16384 |
| 30 | 1073741824 |
| 60 | 1152921504606846976 |

$\Rightarrow$ O número de bactérias é função do tempo, $N(t)$.

## Gráficos

Depois de um certo tempo começamos na nos perder com estes números. Números grandes nos confundem. Mais interessante que a tabela é fazer um gráfico:



# Taxas

## Quão rápido?

Podemos agora nos colocar a questão:

Quão rápido cresce o número de bactérias?
ou
Qual é a velocidade de crescimento das bactérias?

## Definindo a taxa de variação

Para que a questão acima tenha sentido, é preciso definir a "velocidade de crescimento das bactérias"
Vamos fazê-lo agora!

# Taxas II

## Definindo a taxa de variação

$$\text{Taxa de variação de } N(t) = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

Em palavras:
pegue a função em dois instantes próximos ( por um intervalo de tempo $\Delta t$) : $t$ e $t+\Delta t$.
Calcule a diferença e divida pelo intervalo de tempo.

## Faz sentido?

- Uma função que não varia tem taxa de variação nula. OK!
- Uma função que cresce tem taxa de variação positiva. OK!
- Uma função que decresce tem taxa de variação negativa. OK!
- Uma função que cresce mais rápido que outra, tem maior taxa de variação. OK!

# Mais sobre taxas de variação



- Tem um porém.
- O valor de $\Delta t$ é arbitrário.
- Mas para capturar melhor a noção de taxa de variação, gostaríamos que $\Delta t$ fosse o menor possível. Bem pequeno mesmo.
- Quanto menor $\Delta t$, mais $N(t+\Delta t)$ fica próximos de $N(t)$.
- E a razão
$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$
- $?,$
    - $\frac{0}{0}$ ?

# Taxas de variação instantâneas

- Para vermos que a expressão que escrevemos anteriomente faz sentido, podemos tentar calculá-la para um caso bem definido.
- Tomemos $N(t) = t^2$.
- Vamos calcular a taxa de variação:

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

- Para tal escolhemos algum valor de $t$. Digamos $t = 1$

| $\Delta t$ | $\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$ |
|---|---|
| 0,5 | 2,5 |
| 0,1 | 2,1 |
| 0,01 | 2,01 |
| 0,001 | 2,001 |
| 0.00...1 | 2,00000.... |

# Mais taxas...



## Taxas de variação instantânea

- Ótimo: descobrimos que a taxa de variação instantânea da função $N(t) = t^2$ quando $t = 1$ é 2.
- E se $t = 2$, ou ainda outros valores?
- Podemos fazer o cálculo.

# Mais taxas...



## Taxas de variação instantânea

- Ótimo: descobrimos que a taxa de variação instantânea da função $N(t) = t^2$ quando $t = 1$ é 2.
- E se $t = 2$, ou ainda outros valores?
- Podemos fazer o cálculo.

# Mais taxas...

## Taxas de variação instantânea

- Ótimo: descobrimos que a taxa de variação instantânea da função $N(t) = t^2$ quando $t = 1$ é 2.
- E se $t = 2$, ou ainda outros valores?
- Podemos fazer o cálculo.

| $t$ | $\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 8 |

sempre com $\Delta t \Rightarrow 0$.

Então temos que a taxa de variação instantânea de $t^2$ é $2t$.

# Derivada

## Derivada= taxa de variação instantânea

Nós acabamos de calcular a nossa primeira derivada.
Vamos chamar a taxa de variação instantânea de uma função $N(t)$,

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

de derivada de $N(t)$ em relação a $t$. Denotamo-la por :

$$\frac{dN}{dt} \quad \text{ou} \quad N'(t)$$

# Derivada

## Comentários

- veja que nada disto depende do fato de estarmos falando de um organismo em particular;
- podemos pensar em derivadas de qualquer função;
- a derivada de uma função é outrra função;
- podemos ter funções que não dependem do tempo, e sim do espaço, ou de outra variável;
- teremos taxas de variação espacial ==> teremos derivadas de uma função em relaçào a $x$;
- assim podemos considerar a derivada de uma função em relação a qualquer *variável independente*.

Mas chega de enrolação. Vamos aprender a calcular derivadas.

# Cálculos



## Função Constante

$$N(t) = K$$

onde K é uma constante qualquer.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{K - K}{\Delta t} = 0$$

A taxa de variação instantânea de uma função contante é zero.

# Cálculos II

## Função Linear

$$N(t) = at + b$$

onde $a$ e $b$ são constantes quaisquer.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{a(t+\Delta t) + b - at + b}{\Delta t} = \frac{a\Delta t}{\Delta t} = a$$

A taxa de variação instantânea de uma função linear é uma constante.

# Cálculos III

## Função Quadrática

$$N(t) = at^2$$

onde $a$, é uma constante quaisquer.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{a(t+\Delta t)^2 - at^2}{\Delta t} =$$

$$\frac{at^2 + 2at\Delta t + a(\Delta t)^2 - at^2}{\Delta t} =$$

$$\frac{2at\Delta t + a(\Delta t)^2}{\Delta t} = 2at + a(\Delta t) = 2at$$

onde usamos que $\Delta t$ tende a zero.

BIE 5786

R.A. Kraenkel

Prolegômenos

Funções e Suas Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do Cálculo

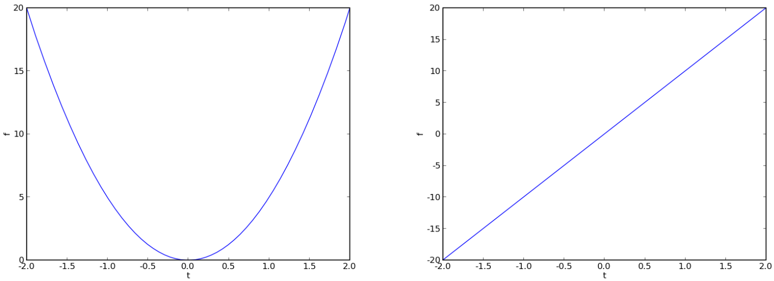
Máximos e Mínimos

Derivada Segunda

Derivadas Parciais

Resumo Final

## Função Quadrática ($5x^2$) e sua Derivada ($10x$)



# Cálculos IV

## Polinômio

$$N(t) = at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} + ...yt + z$$

onde $a$, ... são constantes quaisquer.

$$\frac{dN}{dt} = ant^{n-1} + b(n-1)t^{n-2} + c(n-2)t^{n-3} + ....y$$

## Somas

- Note que a derivada da soma é igual a soma das derivadas.
- Mas a derivada do produto **não** é o produto das derivadas.

# Regras de Cálculo

## Regras do Cálculo

- Muito bem, aprendemos a derivar um polinômio.
- E mais,...?
- Outras funções?
- Vamos aprender isso de uma forma instrumental..
- Vamos apresentar cinco funções básicas e suas derivadas.
- E depois vamos aprender a derivar somas, produtos e composições de funções.

# Regras de Cálculo II



## Cinco casos.

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = e^x$$

$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 1/x$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -\sin(x)$$

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = nx^{n-1} \quad \text{inclusive para } n \text{ negativo.}$$

# Regras de Cálculo III



## Somas

A derivada da soma de duas funções é a soma das suas derivadas.

$$\frac{d(f(x)+g(x))}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d(\sin(x)+\ln(x))}{dx} = \cos(x) + 1/x$$

$$\frac{d(x^4+\cos(x))}{dx} = 4x^3 - \sin(x)$$

# Regras de Cálculo IV

## Produtos

A derivada do produto de duas funções:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot h(x) + g(x) \cdot \frac{dh}{dx}$$

Exemplos

$$f(x) = x^4 \cdot \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 4x^3 \cdot \sin(x) + x^4 \cdot \cos(x)$$

$$f(x) = x^2 \cdot \exp(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 2x \cdot \exp(x) + x^2 \cdot \exp(x)$$

$$f(x) = \ln(x) \cdot \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \cos(x) - \ln(x) \cdot \sin(x)$$

# Exercícios

## Calcule as derivadas das funções abaixo:

$$f(x) = 5x^2 + 4$$

$$f(x) = 1/x$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = x\sin(x)$$

$$f(x) = e^x \ln(x)$$

$$f(x) = x + \sin(x)$$

$$f(x) = \cos(x)\sin(x)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$f(x) = x^2 - x^4\cos(x)$$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$f(x) = x^2 e^x$$

$$f(x) = x^5 \sin(x)$$

$$f(x) = e^x x^7$$

# Compondo funções

## Função de função

- Para que possamos derivar funções mais interessantes, precisamos primeiro nos lembrar de como compor funções.
- Lembremos do significado de
$$f(g(x))$$
- Isto é: tome $x$, aplique $g$ e obtenha $g(x)$; neste resultado aplique $f$ e obtenha $f(g(x))$.
- Façamos alguns exercícios:

| $f(x)$ | $g(x)$ | $f(g(x))$ |
|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $x^2$ | $\sin(x^2)$ |
| $x^3$ | $\ln(x)$ | $(\ln(x))^3$ |
| $e^x$ | $-x^2$ | $e^{-x^2}$ |
| $1/x$ | $\sin(x)$ | $1/\sin(x)$ |

| $f(x)$ | $g(x)$ | $f(g(x))$ |
|---|---|---|
| $-x^2$ | $e^x$ | $-e^{2x}$ |
| $\ln(x)$ | $e^x$ | $x$ |
| $1/x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ |
| $e^x$ | $1/x$ | $e^{1/x}$ |

# Compondo funções I

## Derivada de uma composição de funções

- Agora, vamos ver como derivar a composição de duas funções.
- Se conheço a derivada da função $f(x)$ e da função $g(x)$, deve ser possível obter a derivada de $f(g(x))$.
- De fato é.
- A regra é:

$$\frac{d(f(g(x))}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

Vamos destrinchar isso.

# Compondo funções II

## Derivada de uma composição de funções

Vamos proceder por exemplos.

- Seja $f(x) = sin(x)$ e $g(x) = x^2$.
- Primeiramente calculemos $f(g(x)) = \sin(x^2)$
- Então a derivada da função acima é:

$$\frac{d\sin(x^2)}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2)$$

De novo: chame $x^2 = y$, assim $\frac{df}{dy}(y) = \cos(y)$ e portanto $\frac{df}{dx} = cos(x^2). \cdot 2x = 2x \cdot cos(x^2)$

Vamos treinar mais.

# Compondo funções III

## Derivada de uma composição de funções

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = ax, \quad \rightarrow f(g(x)) = e^{ax} \quad \Rightarrow \frac{d(f(g(x)))}{dx} = ae^{ax}$$

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = -x^2, \quad \rightarrow f(g(x)) = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \frac{d(f(g(x)))}{dx} = -2x \cdot e^{-x^2}$$

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = ax, \quad \rightarrow f(g(x)) = \sin(ax) \quad \Rightarrow \frac{d(f(g(x)))}{dx} = a\cos(ax)$$

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = 2x+1, \quad \rightarrow f(g(x)) = \ln(2x+1) \quad \Rightarrow \frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{2}{2x+1}$$

# Compondo funções IV

## Derivada de uma composição de funções

$$f(x) = 1/x, \quad g(x) = \cos(x), \rightarrow f(g(x)) = 1/\cos(x) \quad \Rightarrow \frac{f(g(x))}{dx} = \sin(x) \cdot \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = \sin(x), \rightarrow f(g(x)) = (\sin(x))^3 \quad \Rightarrow \frac{f(g(x))}{dx} = 3\cos(x) \cdot (\sin(x))^2$$

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = ax, \quad \rightarrow f(g(x)) = \ln(ax) \quad \Rightarrow \frac{f(g(x))}{dx} = 1/x$$

# Compondo funções V



## Muitas e muitas derivadas

- Pronto, agora você sabe derivar muitas funções.
- Somando, multiplicando e compondo as funções elementares
- Agora é uma questão de treino...
- Faça alguns exercícios.

# Exercícios





## Derive as funções abaixo

$$\frac{1}{x+1} \qquad e^{-(x-a)^2}$$

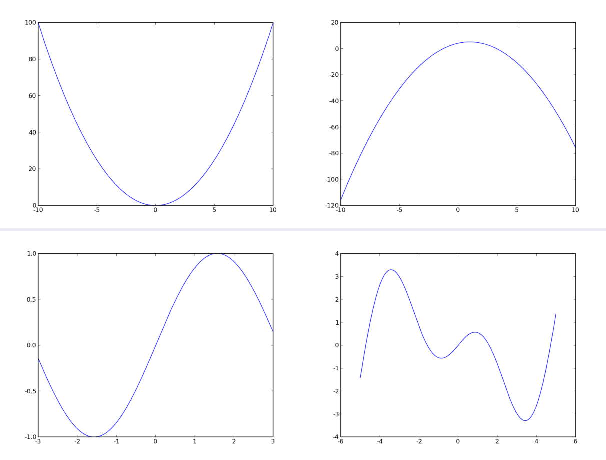
$$\sin(\ln(x)) \qquad x \cdot \sin(3x)$$

$$x \cdot (\sin(x))^2 \qquad \ln(2x+5)$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad (1+x^2)e^{-x}$$

$$(\ln(x))^2 \qquad \frac{x}{1+e^{2x}}$$

## Alguns gráficos

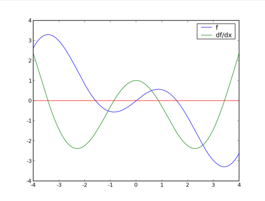


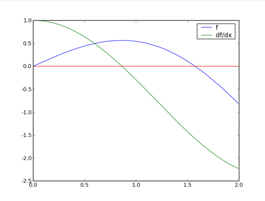
# Máximos e Mínimos

- Vemos nas funções da página anterior que as funções podem ter pontos de **máximos** ou **mínimos** locais.
- Referimo-nos aos pontos que são os ápices e vales dos gráficos anteriores
- Interpretemo-los em termos de derivadas:
  - ao redor de um ápice, a funcão é crescente e se torna descrescente: a derivada passa de positiva para negativa;
  - ao redor de um vale, a função é decrescente e se torna crescente: a derivada passa de negativa para positiva;
- No ápice ou no vale, ou seja, num máximo ou mínimo locais a derivada é zero.
- Para melhor visualizar a situação, veja a figura seguinte, mostrando a função e a sua derivada, com zooms nos ápices e vales.

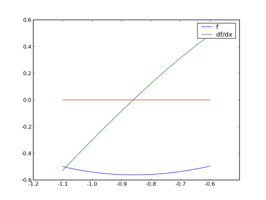
# Máximos e Mínimos II

## A função e sua derivada



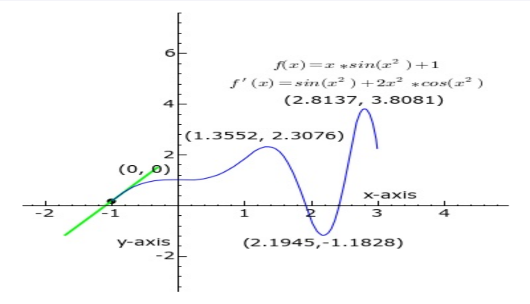

No alto à esquerda, a função e sua derivada. Á direita, zoom ao redor de um máximo local. Abaixo, zoom ao redor de um mínimo local. Veja como o gráfico da derivada cruza o zero no mesmo ponto $x$ em que se localizam máximos e mínimos locais.



# Geometria

## A derivada como uma tangente

Podemos dar uma interpretação geométrica para aderivada de uma função. Usaremos pouco esse conceito no crso, mas vamos dar uma olhada rápida.
Primeiro lembremos o que é uma reta tangente a um ponto de um gráfico.



BIE 5786

R.A. Kraenkel

Prolegômenos

Funções e Suas Variações

Derivadas

Cálculos

Regras do Cálculo

Máximos e Mínimos

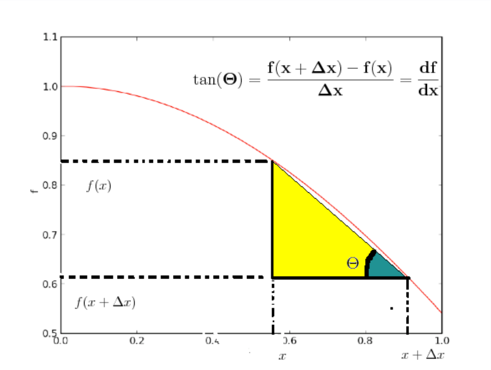
Derivada Segunda

Derivadas Parciais

Resumo Final

## A derivada como uma tangente

- Olhemos a figura abaixo:




Fica como um exercício de trigonometria mostrar que a inclinação ( $\tan(\Theta)$) da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ num dado ponto $x$ é igual a à derivada da função nets ponto $x$.

Veja que isto é coerente com o fato dos máximos e mínimos locais terem derivada nula.

# Derivada Segunda

## Derivada da Derivada

- Vimos que a derivada de uma função $f(x)$ é uma outra função, $df/dx$.
- Em sendo outra função, podemos calcular a sua derivada também: $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$.
- Chamamos esta novísssima funçào de "derivada segunda de $f(x)$". E escrevemos:
- $$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$
- Podemos evidentemente ir calculando derivadas de derivadas, e teremos derivadas terceiras, quartas, etc.

# Derivada Segunda II

## Exemplos

$$f(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a \quad \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = 0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 2ax + b \quad \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = 2a$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = cos(x) \quad \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = -sin(x)$$

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = e^{Ax} \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = Ae^{Ax} \quad \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = A^2e^{Ax}$$

## Várias Variáveis

- Vamos agora a um último conceito.
- Há funções que são funções de mais de uma variável.
- Por exemplo, uma grandeza que dependa do tempo e do local no espaço;
- Escrevemos $f(x,t)$, por exemplo;
- E como derivamos esta função?
- Primeira: derivara em relação à qual variável?
- Digamos que seja $t$.
- Então consideramos $x$ como se fosse uma contante e derivamos a função "normalmente"em relação"a $t$.
- Vamos a um exemplo:

$$f(x,t) = x^2 + 2xt + t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 2x + 2t$$

- E usamos um novo sinal: $\partial$ no lugar de $d$ para indicar que tomamos uma **derivada parcial.**

# Derivadas Parciais

## Exemplos

$$f(x,y) = xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$f(x,y) = x\cos(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin(y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y)$$

$$f(x,y) = e^{x+y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y}$$

$$f(x,y) = x/y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x/y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1/y$$

$$f(x,y) = \cos(x) + \sin(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x)$$

$$f(x,y) = \ln(x+y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y}$$

$$f(x,y) = \sin(Ax+By) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = B\cos(Ax+By) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = A\cos(Ax+By)$$

# Resumo Final

## O que ficou

- A derivada é uma forma de quantificar a noção de taxa de variação instantânea.
- A derivada de uma função é também uma função.
- Aprendemos algumas regras:
  - Derivamos algumas funções elementares;
  - Depois aprendemos a derivar a soma, o produto e a composição de funções.
- Podemos derivar duas vezes uma função: a taxa variação da taxa de variação.
- E também podemos derivar funções de mais de uma variável.